

# Schede riassuntive di *Geometria e topologia differenziale*

A cura di Gabriel Antonio Videtta<sup>1</sup>  
g.videtta1@studenti.unipi.it

Testo basato sul contenuto del corso del prof. Lisca  
tenutosi presso l'Università di Pisa.

A.A. 2025-2026

<sup>1</sup>Basato su un layout di Luca Lombardo e di Francesco Sorce.

# Indice

|                                                                                                                            |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Notazioni impiegate</b>                                                                                                 | <b>2</b>  |
| Analisi matematica . . . . .                                                                                               | 2         |
| Geometria differenziale . . . . .                                                                                          | 2         |
| <b>Prerequisiti matematici</b>                                                                                             | <b>4</b>  |
| Analisi matematica . . . . .                                                                                               | 4         |
| <b>1 Teoria delle curve</b>                                                                                                | <b>5</b>  |
| 1.1 Definizioni preliminari . . . . .                                                                                      | 5         |
| 1.1.1 Curve, tracce e velocità . . . . .                                                                                   | 5         |
| 1.1.2 Lunghezza e intuizione geometrica . . . . .                                                                          | 5         |
| 1.2 (Ri)parametrizzazioni, regolarità e paramet-<br>rizzazioni p.l.a. . . . .                                              | 5         |
| 1.2.1 Riparametrizzazione e prime proprietà . . . . .                                                                      | 5         |
| 1.2.2 Regolarità e coordinate date dalla<br>lunghezza d'arco . . . . .                                                     | 5         |
| 1.3 Curvatura, torsione e triedro di Frenet (caso<br>p.l.a.) . . . . .                                                     | 6         |
| 1.3.1 Versore tangente e curvatura di una<br>curva . . . . .                                                               | 6         |
| 1.3.2 Curve di Frenet, versore normale e<br>binormale . . . . .                                                            | 6         |
| 1.3.3 Torsione ed equazioni di Frenet . . . . .                                                                            | 6         |
| 1.3.4 Compatibilità di curvatura, torsione<br>e triedro tra le riparametrizzazioni<br>p.l.a. di una stessa curva . . . . . | 7         |
| 1.4 Curvatura, torsione e triedro di Frenet (caso<br>generale) . . . . .                                                   | 7         |
| 1.4.1 Definizioni per passaggio al caso p.l.a. . . . .                                                                     | 7         |
| 1.4.2 Formule per calcolare la curvatura, la<br>torsione e il triedro di Frenet nel caso<br>generale . . . . .             | 8         |
| 1.5 Proprietà di curvatura e torsione . . . . .                                                                            | 8         |
| 1.5.1 Torsione e piano osculatore . . . . .                                                                                | 8         |
| 1.5.2 Raggio di curvatura, rette affini e<br>cerchio osculatore . . . . .                                                  | 9         |
| 1.5.3 Teorema fondamentale della teoria<br>delle curve . . . . .                                                           | 9         |
| <b>2 Teoria delle superfici</b>                                                                                            | <b>10</b> |
| 2.1 Definizioni preliminari . . . . .                                                                                      | 10        |
| 2.1.1 Parametrizzazioni regolare . . . . .                                                                                 | 10        |
| 2.1.2 Superficie . . . . .                                                                                                 | 10        |
| 2.2 Classi fondamentali di superfici . . . . .                                                                             | 10        |
| 2.2.1 Superfici di rotazione . . . . .                                                                                     | 10        |
| 2.2.2 Grafici, valori regolari e superfici di<br>livello . . . . .                                                         | 11        |

|          |                                                                                                            |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.3      | Piano tangente e orientabilità . . . . .                                                                   | 11        |
| 2.3.1    | Piano tangente e compatibilità tra parametrizzazioni regolari diverse . . .                                | 11        |
| 2.3.2    | Versori normali e orientabilità . . . . .                                                                  | 11        |
| <b>3</b> | <b>Curve su superfici</b>                                                                                  | <b>13</b> |
| 3.1      | Piano tangente e derivata direzionale . . . . .                                                            | 13        |
| 3.1.1    | Coordinate di una curva rispetto a una parametrizzazione regolare . . . .                                  | 13        |
| 3.1.2    | Relazione tra il piano tangente e le velocità delle curve . . . . .                                        | 13        |
| 3.1.3    | Funzioni lisce sulla superficie e derivata direzionale . . . . .                                           | 13        |
| 3.2      | Operatore forma, I e II forma fondamentale .                                                               | 13        |
| 3.2.1    | Operatore forma e prime proprietà . .                                                                      | 13        |
| 3.2.2    | I e II forma fondamentale . . . . .                                                                        | 14        |
| 3.2.3    | Interpretazione geometrica della II forma fondamentale e curvatura normale . . . . .                       | 14        |
| 3.2.4    | Direzioni e curvature principali, formula di Eulero . . . . .                                              | 15        |
| 3.2.5    | Curvatura gaussiana, media e classificazione di superfici e punti . . . . .                                | 16        |
| 3.3      | Superfici localmente isometriche e Theorema egregium . . . . .                                             | 16        |
| 3.3.1    | Conservazione delle lunghezze su superfici localmente isometriche . . . .                                  | 16        |
| 3.3.2    | Theorema egregium, simboli di Christoffel e conseguenze . . . . .                                          | 17        |
| 3.4      | Trasporto parallelo e campi vettoriali . . . .                                                             | 17        |
| 3.4.1    | Campi vettoriali e derivata covariante                                                                     | 17        |
| 3.4.2    | Campi paralleli lungo una curva e proprietà del trasporto parallelo . . .                                  | 17        |
| 3.5      | Geodetiche . . . . .                                                                                       | 18        |
| 3.5.1    | Relazione tra geodetiche e trasporto parallelo . . . . .                                                   | 18        |
| 3.5.2    | Mappa esponenziale, coordinate normali e intorno normale . . . . .                                         | 18        |
| 3.5.3    | Lemma di Gauss e minimizzazione locale delle distanze . . . . .                                            | 19        |
| 3.5.4    | Relazione di Clairaut per le geodetiche sulle superfici di rotazione . . . . .                             | 19        |
| 3.5.5    | Curvatura geodetica . . . . .                                                                              | 20        |
| 3.6      | Integrazione e teorema di Gauss-Bonnet . . .                                                               | 20        |
| 3.6.1    | Prime definizioni . . . . .                                                                                | 20        |
| 3.6.2    | Regione di una superficie e area . . . .                                                                   | 20        |
| 3.6.3    | Integrazione rispetto a una regione . .                                                                    | 20        |
| 3.6.4    | Angoli esterni, teorema di Gauss-Bonnet locale e corollario . . . . .                                      | 21        |
| 3.6.5    | Superfici orientate con bordo e triangolarizzazione . . . . .                                              | 21        |
| 3.6.6    | Teorema di Radó e caratteristica di Eulero . . . . .                                                       | 21        |
| 3.6.7    | Teorema di Gauss-Bonnet globale e classificazione delle superfici chiuse, orientabili e connesse . . . . . | 21        |

# Notazioni impiegate

Cercheremo di impiegare caratteri latini  $(x, y, z)$  per indicare quantità reali; caratteri latini sottolineati  $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$  per indicare vettori o campi vettoriali; caratteri greci minuscoli  $(\alpha, \beta, \gamma)$  per indicare curve; e caratteri greci maiuscoli  $(\Sigma)$  per indicare superfici.

## Analisi matematica

- $f_i$  – nel caso di una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , la proiezione di  $f$  sulla  $i$ -esima coordinata, ovvero sia  $\pi_i \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .
- $\frac{df}{dt}(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $\dot{f}$  – derivata di una funzione  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Nel caso  $n > 1$ , coincide con il vettore  $(f_i'(t))_i$ . La notazione può essere iterata per ottenere le derivate successive.
- $\partial_{x_i} f(\underline{x})$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x})$ ,  $f_{x_i}(\underline{x})$  – derivata parziale nella  $i$ -esima coordinata di una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nel punto  $\underline{x}$ . La notazione può essere iterata per ottenere le derivate successive.
- $\underline{x}_i$  – derivate parziali nella  $i$ -esima coordinata di un campo  $\underline{x}$  da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ , ovvero sia  $((x_1)_i, \dots, (x_m)_i)^\top$ .
- $\nabla f(\underline{x})$  – gradiente di una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , ovvero sia il vettore  $(\partial_{x_i} f(\underline{x}))_i^\top$ .
- $Jf(\underline{x})$  – jacobiano di una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  nel punto  $\underline{x}$ , ovvero sia la matrice  $(\partial_{x_j} f_i(\underline{x}))_{i,j} = (\nabla f_i(\underline{x}))_i$ .
- $J_{\underline{y}} f(\underline{p})$  – nel caso di una funzione  $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , la sottomatrice  $n \times n$  quadrata di  $Jf(\underline{p})$  date dalle ultime  $n$  colonne. Coincide con  $J(\pi_{\mathbb{R}^n} \circ f)(\underline{p})$ .
- $C^n$  – classe delle funzioni dotate di derivate parziali continue fino all'ordine  $n$ . Per  $n = 0$ , coincide con la classe delle funzioni continue ( $C^0$ ).
- $C^\infty$ , liscio – classe delle funzioni derivabili parzialmente per un numero arbitrario di volte con continuità.
- diffeomorfismo di classe  $C^k$  – funzione di classe  $C^k$  con inversa di classe  $C^k$ .

## Geometria differenziale

- $B_R(P, \mathbb{R}^n)$ ,  $B_R(P)$  – la palla  $n$ -dimensionale di raggio  $R$  e centro  $P$ . Ometteremo  $\mathbb{R}^n$  quando la dimensione si deduce dal contesto.
- $S_a^i(P)$  – l'ipersfera  $i$ -dimensionale di raggio  $a$  e centro  $P$ , ovvero sia  $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^{i+1} \mid \|\underline{x} - P\| = a\}$ .
- $\mathbb{T}_{a,b}$  – toro di raggio maggiore  $a$  e raggio minore  $b$ .
- $\ell(\alpha)$  – lunghezza di una curva  $\alpha$ .
- p.l.a. – parametrizzata a lunghezza d'arco, ovvero sia con velocità unitaria.
- $\kappa_\alpha$  – curvatura di una curva  $\alpha$  in un punto.
- $\tau_\alpha$  – torsione di una curva  $\alpha$  in un punto.
- $T_\alpha$  – versore tangente di una curva regolare in un punto.
- $N_\alpha$  – versore normale di una curva di Frenet in un punto.
- $B_\alpha$  – versore binormale di una curva di Frenet in un punto.
- $\Pi_\alpha$  – piano osculatore di  $\alpha$  in un punto.
- $R_\alpha$  – raggio di curvatura di  $\alpha$  in un punto.
- $T_P \Sigma$  – piano tangente di  $P$  rispetto a  $\Sigma$ .
- $\underline{n}$ ,  $n_{\underline{x}}$  – (versore) normale (eventualmente locale) di una superficie o di una parametrizzazione regolare.
- $D_\xi f(P)$  – derivata direzionale con direzione  $\xi$  della funzione  $f$  nel punto  $P$  di una superficie.
- $S_P$  – operatore forma nel punto  $P$  di una superficie.
- $I_P$  – I forma fondamentale nel punto  $P$  di una superficie.
- $II_P$  – II forma fondamentale nel punto  $P$  di una superficie.
- $E, F, G$  – elementi della rappresentazione matriciale della I forma fondamentale:  $I_P = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ .
- $\ell, m, n$  – elementi della rappresentazione matriciale della II forma fondamentale:  $II_P = \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix}$ .

- $a, b, c, d$  – elementi della rappresentazione matriciale dell'operatore forma:  $S_P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ .
- $\kappa_n$  – curvatura normale di una superficie in un punto  $P$  secondo un dato vettore unitario.
- $\kappa_{\alpha,n}$  – curvatura normale di  $\alpha$  rispetto a una superficie.
- $\kappa_1, \kappa_2$  – curvature principali di una superficie in un punto.
- $\kappa$  – curvatura gaussiana di una superficie in un punto.
- $H$  – curvatura media di una superficie in un punto.
- $\Gamma_{ij}^k$  – simbolo di Christoffel, ovverosia coefficiente di  $\underline{x}_k$  in  $\underline{x}_{ij}$ .
- $\nabla_v X(P)$  – derivata covariante di un campo vettoriale  $X$  tangente alla superficie  $\Sigma$  in direzione  $v$  nel punto  $P$ .
- $(\cdot)^\top$  – proiezione di  $\cdot$  sul piano tangente  $T_P \Sigma$ .
- $\gamma_v$  – geodetica locale di direzione  $v$ .
- $U_P$  – intorno di definizione della mappa esponenziale in un punto  $P$ .
- $\exp_P$  – mappa esponenziale in un punto  $P$ .
- $v_k$  – data una base ortonormale  $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ , la mappa  $t \mapsto k(\cos(t)\underline{e}_1 + \sin(t)\underline{e}_2)$ .
- $N_P$  – intorno normale di un punto  $P$ .
- $\varphi(\gamma(t))$  – angolo tra la curva  $\gamma$  e il parallelo di  $\gamma(t)$  al tempo  $t$ .
- $r(\gamma(t))$  – distanza di  $\gamma(t)$  dall'asse di rotazione.
- $k_{\alpha,g}$  – curvatura geodetica di una curva  $\alpha$  rispetto a una superficie  $\Sigma$ .
- $A(R)$  – area di una regione  $R$  di una superficie  $\Sigma$ .
- $\int_R \varphi dA$  – integrazione rispetto all'area in una regione  $R$ , equivalente a  $\iint_{\underline{x}^{-1}(R)} (\varphi \circ \underline{x}) \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| du dv$ .
- $\varepsilon_i$  – angolo esterno  $i$ -esimo di una regione o superficie con bordo.
- $\iota_i$  – angolo interno  $i$ -esimo di una regione o superficie con bordo.
- $\partial \Sigma$  – bordo di una superficie con bordo, come unione delle tracce delle regioni con cui è definita per differenza.
- $\chi(\Sigma)$  – caratteristica di Eulero di una superficie con bordo.

# Prerequisiti matematici

## Analisi matematica

- **Teorema di Schwarz** – Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione che ammette derivate seconde miste continue in  $\underline{x}$ . Allora  $\partial_{x_i x_j} f(\underline{x}) = \partial_{x_j x_i} f(\underline{x})$  per ogni variabile  $x_i, x_j$ .
- **Teorema della funzione implicita** – Sia  $U$  un aperto di  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  e sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione di classe  $C^k$  con  $k \geq 1$ . Sia  $p = (x_0, y_0)$  un punto in  $U$  con  $f(x_0, y_0) = \underline{a}$  e  $J_y f(p)$  invertibile.

Allora esiste un intorno  $A = I_{\underline{x}} \times I_{\underline{y}}$  di  $p$  in  $U$  all'interno del quale esiste un'unica funzione  $g : I_{\underline{x}} \rightarrow I_{\underline{y}}$  di classe  $C^k$  per cui:

$$\underline{y} = g(\underline{x}) \iff f(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{a}, \quad (\text{in } A).$$

Inoltre per tale  $g$  vale:

$$Jg(\underline{x}_0) = -J_y f(p)^{-1} J_x f(p).$$

- **Teorema di invertibilità locale** – Sia  $U$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione di classe  $C^k$ , con  $k \geq 1$ . Sia  $\underline{x}_0$  un punto in  $U$  con  $Jf(\underline{x}_0)$  invertibile.  
Allora esiste un intorno  $A$  di  $\underline{x}_0$  in  $U$  dentro al quale  $f|_A$  ha un'inversa  $g$ , anch'essa di classe  $C^k$ , per la quale  $Jg(f(\underline{x})) = Jf(\underline{x})^{-1}$ .
- **Teorema di esistenza e unicità globale per sistemi lineari di equazioni differenziali** – Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo aperto e siano date due funzioni continue:

$$A : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{e} \quad \underline{b} : I \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Fissato  $(t_0, \underline{y}_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ , esiste un'unica soluzione  $\underline{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = A(t)\underline{y}(t) + \underline{b}(t), \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0. \end{cases}$$

- **Teorema di Cauchy-Lipschitz per l'esistenza e l'unicità locale** – Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  e sia  $\underline{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione continua. Si supponga inoltre che  $\underline{f}$  sia *localmente lipschitziana* rispetto alla seconda variabile.

Allora, per ogni  $(t_0, \underline{y}_0) \in \Omega$ , esistono  $\delta > 0$  e un'unica funzione  $\underline{y} : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1$  che risolve il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0. \end{cases}$$

- **Teorema di dipendenza liscia dai dati iniziali** – Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  e sia  $\underline{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione di classe  $C^k$  con  $k \geq 1$ . Indichiamo con  $\Phi(t, t_0, \underline{y}_0)$  la soluzione massimale del problema di Cauchy con dato iniziale  $\underline{y}(t_0) = \underline{y}_0$ .

Allora l'insieme di definizione del flusso:

$$\mathcal{D} = \left\{ (t, t_0, \underline{y}_0) \in \mathbb{R} \times \Omega : \begin{array}{l} \text{la soluzione } \underline{y}(t, t_0, \underline{y}_0) \\ \text{esiste al tempo } t \end{array} \right\}$$

è un aperto di  $\mathbb{R} \times \Omega$  e l'applicazione  $\Phi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  è di classe  $C^k$ .

# Parte 1

## Teoria delle curve

Qualora non specificato, assumeremo l'utilizzo di funzioni di classe  $C^\infty$ .

Se  $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$  e  $f$  è una funzione relativa a una curva  $\alpha$ , ammettiamo l'abuso di notazione  $f(\underline{x})$ , intendendo  $f(\alpha^{-1}(\underline{x}))$ ; per esempio useremo  $\kappa(P)$  per intendere  $\kappa(\alpha^{-1}(P))$ .

### 1.1 Definizioni preliminari

#### 1.1.1 Curve, tracce e velocità

**Definizione 1.1** (Curva parametrizzata).

Una **curva parametrizzata** (o semplicemente *curva*) è una mappa  $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  di classe  $C^\infty$ , dove  $I$  è un intervallo.

**Definizione 1.2** (Traccia di una curva).

Si dice **traccia** (o *supporto*) di una curva parametrizzata  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , la sua immagine  $\alpha(I)$ .

**Definizione 1.3** (Velocità di una curva).

Si definisce la **velocità** di una curva parametrizzata  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  come la curva indotta dalla derivata di  $\alpha$ :

$$\alpha'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

#### 1.1.2 Lunghezza e intuizione geometrica

**Definizione 1.4** (Lunghezza di una curva).

Si definisce la **lunghezza**  $\ell(\alpha)$  di una curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  come:

$$\ell(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \int_I \|\alpha'(t)\| dt.$$

*Osservazione 1.5.*

La definizione data per la lunghezza di una curva corrisponde alla nostra idea intuitiva di lunghezza tramite i seguenti due risultati:

1. **Validità sul segmento:** Su un segmento lineare  $\alpha(t) = A + t(B - A)$  con  $I = [0, 1]$ ,  $\ell(\alpha) = \|B - A\|$ .
2. **Approssimazione poligonale:** La lunghezza  $\ell(\alpha)$  è il limite delle lunghezze delle poligoni inscritte nella curva. In termini teorici:

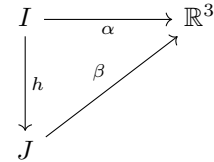
Sia dato  $\varepsilon > 0$ . Allora esiste  $\delta > 0$  tale per cui, per ogni partizione  $\{t_i\}_{i=0}^n$  di  $I$  di finezza inferiore a  $\delta$  (i.e.,  $\max |t_{i+1} - t_i| < \delta$ ), vale  $\|S - \ell(\alpha)\| < \varepsilon$ , dove  $S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\|$ .

### 1.2 (Ri)parametrizzazioni, regolarità e parametrizzazioni p.l.a.

#### 1.2.1 Riparametrizzazione e prime proprietà

**Definizione 1.6** (Riparametrizzazione di una curva).

Data una curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , una **riparametrizzazione**  $\beta$  di  $\alpha$  è una curva  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale per cui esiste un diffeomorfismo liscio  $h : I \rightarrow J$  con  $\alpha = \beta \circ h$ .



Se  $h' > 0$ , si dice che  $h$  mantiene l'orientazione di  $\alpha$ ; se  $h' < 0$ ,  $h$  inverte l'orientazione.

**Proposizione 1.7.**

Se  $\beta$  è una riparametrizzazione di  $\alpha$ , allora  $\ell(\beta) = \ell(\alpha)$ .

#### 1.2.2 Regolarità e coordinate date dalla lunghezza d'arco

**Definizione 1.8** (Curva regolare).

Si dice che una curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  è **regolare** se  $\alpha'(t) \neq 0$  per ogni  $t \in I$ .

**Definizione 1.9** (Curva parametrizzata a lunghezza d'arco).

Si dice che una curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  è **parametrizzata a lunghezza d'arco (p.l.a.)** se  $\alpha'$  è un vettore unitario (i.e.,  $\|\alpha'\| = 1$ ). In tal caso,  $\ell(\alpha|_{[a,b]}) = b - a$ .

**Proposizione 1.10** (Riparametrizzazione a lunghezza d'arco).

Se  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una curva regolare, allora  $\alpha$  ammette una riparametrizzazione a lunghezza d'arco, ossia ammette una riparametrizzazione  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale per cui  $\beta$  sia p.l.a.

*Dimostrazione.*

Poiché  $\alpha$  è regolare, la funzione  $s : I \rightarrow [0, \ell(\alpha)]$  tale per cui

$$s(t) = \int_a^t \|\alpha'(t)\| dt$$

è un diffeomorfismo liscio. Quindi  $\beta = \alpha \circ s^{-1}$  è una riparametrizzazione di  $\alpha$ , e vale:

$$\beta'(s) = \frac{\alpha'(s^{-1}(s))}{s'(s^{-1}(s))} = \frac{\alpha'(s^{-1}(s))}{\|\alpha'(s^{-1}(s))\|},$$

che è un vettore unitario.  $\square$

*Osservazione 1.11.*

Tutte le riparametrizzazioni p.l.a. di una curva regolare  $\alpha$  sono ottenibili da una singola riparametrizzazione p.l.a.  $\beta$  come  $\beta(\pm t + v)$ , al variare di  $v \in \mathbb{R}$ . In particolare, le riparametrizzazioni che mantengono l'orientazione sono quelle della forma  $\beta(t + v)$ , mentre quelle che la invertono sono della forma  $\beta(-t + v)$ .

Se infatti  $\gamma$  è una riparametrizzazione p.l.a. di  $\beta$  (e quindi di  $\alpha$ ), deve valere  $\beta = \gamma \circ f$  per  $f$  diffeomorfismo. Quindi, per ogni tempo possibile di  $\beta$ , vale:

$$\beta'(s) = \gamma'(f(s))f'(s).$$

Dal momento che  $\beta'(s)$  e  $\gamma'(f(s))$  sono vettori unitari per ipotesi,  $f'(s)$  può assumere solo  $\pm 1$  come valore. Dacché il dominio di  $f$  è connesso e  $f'$  è liscia,  $f'$  è costantemente 1 o  $-1$ , e dunque  $f(t)$  è della forma  $\pm t + v$  con  $v \in \mathbb{R}$ .

## 1.3 Curvatura, torsione e triedro di Frenet (caso p.l.a.)

In tutta questa sezione consideriamo una curva p.l.a.  $\beta$ .

Se implicito, tralasceremo  $\beta$  nella notazione.

### 1.3.1 Versore tangente e curvatura di una curva

**Definizione 1.12** (Versore tangente).

Sia  $\beta$  una curva p.l.a., allora si definisce il suo **versore tangente**  $T_\beta$  come  $\beta'$ .

**Definizione 1.13** (Curvatura).

Sia  $\beta$  una curva p.l.a., allora si definisce la **curvatura**  $\kappa_\beta(s)$  di  $\beta$  al tempo  $s$  come  $\|\dot{T}_\beta(s)\|$ .

Laddove è chiaro dal contesto quale sia  $\beta$ , scriviamo solo  $\kappa(s)$ .

### 1.3.2 Curve di Frenet, versore normale e binormale

**Definizione 1.14** (Curva di Frenet p.l.a.).

Una curva p.l.a.  $\beta$  si dice **curva di Frenet** se ad ogni tempo  $s$ , la curvatura è positiva ( $\kappa_\beta(s) > 0$ ).

**Definizione 1.15** (Versore normale).

Se  $\beta$  è una curva di Frenet, allora è ben definito a ogni tempo  $s$  il **versore normale**  $N_\beta(s)$  così definito:

$$N_\beta(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\dot{T}_\beta(s)}{\|\dot{T}_\beta(s)\|}.$$

**Definizione 1.16** (Versore binormale).

Se  $\beta$  è una curva di Frenet, allora è ben definito a ogni tempo  $s$  il **versore binormale**  $B_\beta(s)$  così definito:

$$B_\beta(s) \stackrel{\text{def}}{=} T_\beta(s) \times N_\beta(s).$$

*Osservazione 1.17* (Triedro di Frenet).

Se  $\beta$  è di Frenet, allora, dacché  $\dot{T}_\beta \perp T_\beta$ ,  $N_\beta$  e  $T_\beta$  sono linearmente indipendenti. Dunque  $\{T_\beta, N_\beta, B_\beta\}$  formano una base ortonormale a ogni tempo  $s$ . Tale base è detta **triedro di Frenet**.

### 1.3.3 Torsione ed equazioni di Frenet

Assumiamo in questa sottosezione di star lavorando con curve di Frenet p.l.a.

**Proposizione 1.18** (Prima equazione di Frenet).

Sia  $\beta$  una curva di Frenet p.l.a. Allora vale la seguente equazione:

$$\dot{T}_\beta(s) = \kappa_\beta(s) \cdot N_\beta(s). \quad (\text{F1})$$

*Osservazione 1.19.*

Osserviamo che  $\dot{N}_\beta$  è ortogonale in ogni tempo a  $N_\beta$ , e dunque  $\dot{N}_\beta$  sarà contenuto in  $\text{span}(T_\beta, B_\beta)$ .

Inoltre, derivando  $N_\beta(s) \cdot T_\beta(s) = 0$ , otteniamo:

$$\dot{N}_\beta(s) \cdot T_\beta(s) = -N_\beta(s) \cdot \dot{T}_\beta(s) = -\kappa_\beta(s).$$

**Definizione 1.20** (Torsione).

Sia  $\beta$  una curva di Frenet p.l.a. Allora definiamo la **torsione**  $\tau_\beta(s)$  come il coefficiente di  $\dot{N}_\beta(s)$  in  $B_\beta(s)$ , ovvero:

$$\tau_\beta(s) = \dot{N}_\beta(s) \cdot B_\beta(s).$$

**Proposizione 1.21** (Seconda equazione di Frenet).

Sia  $\beta$  una curva di Frenet p.l.a. Allora vale la seguente equazione:

$$\dot{N}_\beta(s) = -\kappa_\beta(s) T_\beta(s) + \tau_\beta(s) B_\beta(s). \quad (\text{F2})$$

**Proposizione 1.22** (Terza equazione di Frenet).

Sia  $\beta$  una curva di Frenet p.l.a. Allora vale la seguente equazione:

$$\dot{B}_\beta(s) = -\tau_\beta(s) N_\beta(s), \quad (\text{F3})$$

e quindi  $\tau_\beta(s) = -\dot{B}_\beta(s) \cdot N_\beta(s)$ .

*Osservazione 1.23.*

Dal momento che  $B_\beta = T_\beta \times N_\beta$ , derivando  $B_\beta$  otteniamo:

$$\dot{B}_\beta = \dot{T}_\beta \times N_\beta + T_\beta \times \dot{N}_\beta,$$

dal quale, applicando le prime due equazioni di Frenet, ricaviamo (F3).

*Osservazione 1.24.*

In termini matriciali, le tre equazioni di Frenet possono scriversi in modo più compatto come:

$$\begin{pmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

### 1.3.4 Compatibilità di curvatura, torsione e triedro tra le riparametrizzazioni p.l.a. di una stessa curva

**Proposizione 1.25.**

Sia  $\gamma : J \rightarrow \mathbb{R}^3$  una riparametrizzazione p.l.a. di una curva p.l.a.  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Allora le curvature delle due curve coincidono nei punti delle tracce.

In altre parole, se  $f : J \rightarrow I$  è il diffeomorfismo per cui  $\gamma = \beta \circ f$ , allora:

$$\kappa_\gamma(s) = \kappa_\beta(f(s)).$$

Inoltre, se  $\beta$  è di Frenet, anche  $\gamma$  è di Frenet, e se  $f$  preserva l'orientazione, allora i triedri di Frenet e la torsione coincidono nei punti delle tracce, ossia:

$$T_\gamma(s) = T_\beta(f(s)), \quad N_\gamma(s) = N_\beta(f(s)),$$

$$B_\gamma(s) = B_\beta(f(s)), \quad \tau_\gamma(s) = \tau_\beta(f(s)).$$

Qualora  $f$  non preservasse l'orientazione, le quantità sopracitate di  $\gamma$  coincidono con quelle di  $\beta$  nei punti, ma sono cambiate di segno (eccetto per la normale  $N_\gamma$ , che invece ha stesso verso).

## 1.4 Curvatura, torsione e triedro di Frenet (caso generale)

### 1.4.1 Definizioni per passaggio al caso p.l.a.

**Definizione 1.26** (Curva di Frenet).

Sia  $\alpha$  una curva regolare. Allora si dice che  $\alpha$  è una **curva di Frenet** se una sua qualsiasi riparametrizzazione p.l.a. è di Frenet.

*Osservazione 1.27.*

Per la Proposizione 1.25, se  $\alpha$  è di Frenet, allora ogni sua riparametrizzazione p.l.a. è di Frenet.

Possiamo estendere questa idea anche per definire il triedro di Frenet e la torsione.

**Definizione 1.28** (Versore tangente).

Sia  $\alpha$  una curva regolare. Allora si definisce il **versore tangente** di  $\alpha$  al tempo  $t$  come:

$$T_\alpha(t) = T_\beta(f(s)),$$

dove  $\beta$  è una riparametrizzazione p.l.a. di  $\alpha$  con  $\alpha = \beta \circ f$  e  $f$  diffeomorfismo che preserva l'orientazione.

*Osservazione 1.29.*

Se  $t$  è un tempo in cui  $\alpha'(t) \neq 0$ , allora, per continuità, esiste un intorno di  $t$  in cui  $\alpha$  è regolare (i.e.,  $\alpha$  è localmente regolare in  $t$ ). Questo ci permette di definire la curvatura come segue:

**Definizione 1.30** (Curvatura).

Sia  $\alpha$  una curva regolare al tempo  $t$ . Allora si definisce la **curvatura** al tempo  $t$  come:

$$\kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(f(s)),$$

dove  $\beta$  è una riparametrizzazione locale p.l.a. di  $\alpha$  con  $\alpha = \beta \circ f$  e  $f$  diffeomorfismo.

Qualora  $\alpha$  non fosse regolare in  $t$  (i.e.,  $\alpha'(t) = 0$ ), si pone  $\kappa_\alpha(t) = 0$ .

**Proposizione 1.31.**

Una curva  $\alpha$  è regolare e di Frenet se e solo se  $\kappa_\alpha(t) > 0$  per ogni  $t$ .

**Definizione 1.32** (Versore normale).

Sia  $\alpha$  una curva di Frenet. Allora si definisce il **versore normale** di  $\alpha$  al tempo  $t$  come:

$$N_\alpha(t) = N_\beta(f(s)),$$

dove  $\beta$  è una riparametrizzazione p.l.a. di  $\alpha$  con  $\alpha = \beta \circ f$  e  $f$  diffeomorfismo.

**Definizione 1.33** (Versore binormale).

Sia  $\alpha$  una curva di Frenet. Allora si definisce il **versore binormale** di  $\alpha$  al tempo  $t$  come:

$$B_\alpha(t) = B_\beta(f(s)),$$

dove  $\beta$  è una riparametrizzazione p.l.a. di  $\alpha$  con  $\alpha = \beta \circ f$  e  $f$  diffeomorfismo che preserva l'orientazione.

**Definizione 1.34** (Torsione).

Sia  $\alpha$  una curva di Frenet. Allora si definisce la **torsione** di  $\alpha$  al tempo  $t$  come:

$$\tau_\alpha(t) = \tau_\beta(f(s)),$$

dove  $\beta$  è una riparametrizzazione p.l.a. di  $\alpha$  con  $\alpha = \beta \circ f$  e  $f$  diffeomorfismo che preserva l'orientazione.

**Proposizione 1.35.**

Valgono le equazioni di Frenet ( $F1$ ,  $F2$ ,  $F3$ ) anche nel caso generale.

## 1.4.2 Formule per calcolare la curvatura, la torsione e il triedro di Frenet nel caso generale

*Osservazione 1.36.*

Se  $\alpha$  è una curva regolare e  $\alpha = \beta \circ f$ , dove  $\beta$  è una sua riparametrizzazione p.l.a. e  $f$  è un diffeomorfismo, allora:

$$\alpha'(t) = \beta'(f(t))f'(t) = T_\alpha(t)f'(t), \quad (1.1)$$

da cui si ricava applicando  $f'(t) = \|\alpha'(t)\|$  la seguente proposizione:

**Proposizione 1.37** (Formula per il versore tangente).

*Sia  $\alpha$  una curva regolare. Allora vale:*

$$T_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|},$$

ovverosia il versore tangente è dato dalla normalizzazione della derivata al tempo  $t$ .

*Osservazione 1.38.*

Derivando ulteriormente l'eq. (1.1), si ottiene:

$$\alpha''(t) = \dot{T}_\alpha(t) \|\alpha''(t)\|^2 + T_\alpha(t)f''(t). \quad (1.2)$$

Applicando  $\alpha'(t) \times$  all'eq. (1.2) e sfruttando che  $\alpha' \parallel T_\alpha$  si ricava:

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \|\alpha''(t)\|^2 (\alpha'(t) \times \dot{T}_\alpha(t)), \quad (1.3)$$

dalla quale, usando che  $\alpha'(t) \perp \dot{T}_\alpha$ , e prendendo le norme, si ottiene la seguente proposizione:

**Proposizione 1.39** (Formula per la curvatura).

*Sia  $\alpha$  una curva regolare. Allora vale:*

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

*Osservazione 1.40.*

Assumendo che  $\alpha$  sia di Frenet, applicando (F1) all'eq. (1.3), si ottiene:

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \kappa_\alpha(t) \|\alpha''(t)\|^3 (T_\alpha(t) \times N_\alpha(t)),$$

dalla quale equazione, usando che  $B_\alpha(t) = T_\alpha(t) \times N_\alpha(t)$ , si ottengono subito la seguente proposizione:

**Proposizione 1.41** (Formula per il versore binormale).

*Sia  $\alpha$  una curva di Frenet. Allora vale:*

$$B_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|},$$

ovverosia il versore binormale è dato dalla normalizzazione di  $\alpha' \times \alpha''$  al tempo  $t$ .

*Osservazione 1.42* (Formula per il versore normale).

Per calcolare  $N_\alpha(t)$  si sfrutta la relazione:

$$N_\alpha(t) = B_\alpha(t) \times T_\alpha(t).$$

*Osservazione 1.43.*

Deriviamo per l'ultima volta l'eq. (1.2), e sostituendovi (F2), otteniamo:

$$\begin{aligned} \alpha'''(t) &= (f'''(t) - \kappa_\alpha(t)f'(t)^3) \underline{T}_\alpha(t) \\ &\quad + (\kappa'_\alpha(t)f'(t)^3 + 3\kappa_\alpha(t)f'(t)f''(t)) \underline{N}_\alpha(t) \\ &\quad + \kappa_\alpha(t)\tau_\alpha(t)f'(t)^3 \underline{B}_\alpha(t). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Applicando  $(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot$  all'eq. (1.4), e usando che  $\alpha'(t) \times \alpha''(t)$  è ortogonale a  $T_\alpha$ ,  $N_\alpha$ , ma parallelo a  $B_\alpha$ , ricaviamo la seguente proposizione:

**Proposizione 1.44** (Formula per la torsione).

*Sia  $\alpha$  una curva di Frenet. Allora vale:*

$$\tau_\alpha(t) = \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \cdot \alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}.$$

## 1.5 Proprietà di curvatura e torsione

### 1.5.1 Torsione e piano osculatore

La torsione rappresenta “quanto una curva è distante dall'essere un piano”. Più  $\tau_\alpha(t)$  si avvicina a 0 e più la curva  $\alpha$  in 0 è localmente simile a un piano, in particolare il piano osculatore:

**Definizione 1.45** (Piano osculatore).

Sia  $\alpha$  una curva di Frenet. Allora si definisce il **piano osculatore**  $\Pi_\alpha(t)$  al tempo  $t$  di  $\alpha$  come il seguente piano affine:

$$\Pi_\alpha(t) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(t) + \text{span}(T_\alpha(t), N_\alpha(t)).$$

L'intuizione presentata precedentemente è formalizzata dal seguente risultato:

**Proposizione 1.46.**

*Sia  $\alpha$  una curva di Frenet con  $\tau_\alpha \equiv 0$ . Allora  $\Pi_\alpha(t)$  è costante e la traccia di  $\alpha$  è contenuta in  $\Pi_\alpha$ .*

*Dimostrazione.*

Possiamo assumere senza perdita di generalità che  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  sia p.l.a. Allora da (F3), si ricava  $\dot{B}_\alpha \equiv 0$ , e quindi  $B_\alpha$  è costante. Poiché  $B_\alpha$  è costante, la normale di  $\Pi_\alpha(t)$  è costante.

Osserviamo che  $T_\alpha \in B_\alpha^\perp$ , da cui  $T_\alpha \cdot B_\alpha = \alpha' \cdot B_\alpha = 0$ . Ciò, unito al fatto che  $I$  è connesso, implica che  $\alpha(t) \cdot B_\alpha$  sia costante. Pertanto  $(\alpha(t) - \alpha(t_0)) \cdot B_\alpha = 0$  per ogni  $t_0$  in  $I$  su tutto  $I$ . Questa è esattamente l'equazione di appartenenza al piano  $\Pi_\alpha(t_0)$ : si conclude allora che  $\Pi_\alpha(t)$  è costante e che la traccia di  $\alpha$  è contenuta in  $\Pi_\alpha$ .  $\square$

### 1.5.2 Raggio di curvatura, rette affini e cerchio osculatore

La curvatura rappresenta “quanto una curva è distante dall’essere una retta”. Più  $\kappa_\alpha(t)$  si avvicina a 0 e più la curva  $\alpha$  in 0 è localmente simile a una retta.

I due seguenti risultati formalizzano proprio questa intuizione.

**Proposizione 1.47.**

*Sia  $\alpha$  una curva regolare con  $\kappa_\alpha \equiv 0$ . Allora  $\alpha$  è contenuta in una retta affine. Viceversa, una retta affine si parametrizza con una curva avente curvatura nulla.*

*Dimostrazione.*

Possiamo supporre senza perdita di generalità che  $\alpha$  sia p.l.a. Allora  $\kappa_\alpha \equiv 0$  implica che  $\dot{T}_\alpha \equiv 0$ , ovverosia che  $T_\alpha$  è costante. Pertanto  $\alpha(t) = T_\alpha \cdot t + P$  per un  $P \in \mathbb{R}^3$ .

Il viceversa è poi immediato.  $\square$

**Definizione 1.48** (Raggio di curvatura).

Sia  $\alpha$  una curva di Frenet. Allora si definisce il **raggio di curvatura**  $R_\alpha(t)$  al tempo  $t$  di  $\alpha$  come:

$$R_\alpha(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\kappa_\alpha(t)}.$$

**Definizione 1.49** (Cerchio osculatore).

Sia  $\alpha$  una curva di Frenet. Si definisce il **cerchio osculatore**  $\mathcal{C}_\alpha(t)$  al tempo  $t$  di  $\alpha$  come il cerchio di raggio  $R_\alpha(t)$  e centro  $\alpha(t) + R_\alpha(t)N_\alpha(t)$  contenuto nel piano osculatore  $\Pi_\alpha(t)$ .

**Proposizione 1.50** (Il raggio di curvatura è il raggio del cerchio che meglio approssima  $\alpha$  in un punto).

*Sia  $\alpha$  una curva p.l.a. di Frenet. Si ponga:*

$$f_{P,R}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \|\alpha(t) - P\|^2 - R^2.$$

*Consideriamo i cerchi di raggio  $P$  e  $R$  nel piano  $\Pi_\alpha(t_0)$ , denotati con  $\mathcal{C}(P, R)$ . Si pongano le seguenti condizioni:*

- $f_{P,R}(t_0) = 0$ , ovverosia il cerchio  $\mathcal{C}(P, R)$  passa per  $\alpha(t_0)$ ;
- $f'_{P,R}(t_0) = f''_{P,R}(t_0) = 0$ , ovverosia il cerchio  $\mathcal{C}(P, R)$  approssima  $\alpha$  in  $t_0$  fino al secondo ordine.

*Allora l’unico cerchio  $\mathcal{C}(P, R)$  soddisfacente le sopracitate condizioni è il cerchio osculatore  $\mathcal{C}_\alpha(t_0)$  al tempo  $t_0$  di  $\alpha$ .*

*Dimostrazione.*

Osserviamo che:

$$f'_{P,R}(t) = 2\alpha'(t) \cdot (\alpha(t) - P),$$

e quindi  $f'_{P,R}(t_0) = 0$  implica  $T_\alpha(t_0) \perp \alpha(t_0) - P$ . Dal momento che il cerchio  $\mathcal{C}(P, R)$  deve essere contenuto nel piano osculatore di  $\alpha(t_0)$ , allora  $\alpha(t_0) - P \parallel N_\alpha(t_0)$ .

Inoltre:

$$f''_{P,R}(t) = 2(\alpha''(t) \cdot (\alpha(t) - P) + \|\alpha'(t)\|^2),$$

da cui, ponendo  $f''_{P,R}(t_0) = 0$ , si ottiene:

$$P = \alpha(t_0) + R_\alpha(t_0)N_\alpha(t_0).$$

Infine, usando che  $f_{P,R}(t_0) = 0$ , si conclude che  $R = R_\alpha(t_0)$ .  $\square$

### 1.5.3 Teorema fondamentale della teoria delle curve

La curvatura e la torsione delineano essenzialmente un’unica curva:

**Teorema 1.51** (fondamentale della teoria delle curve).

*Due curve p.l.a. di Frenet  $\alpha, \hat{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  hanno curvatura e torsione coincidente se e solo se la traccia di una curva è ottenibile dall’altra tramite movimento rigido dello spazio (i.e., isometria con parte lineare in  $SO(3)$ ).*

## Parte 2

# Teoria delle superfici

Qualora non specificato, assumeremo l'utilizzo di funzioni di classe  $C^\infty$ .

Se  $\underline{x}$  è una parametrizzazione regolare o una funzione con dominio un sottinsieme di  $\mathbb{R}^2$ , ammettiamo l'abuso di notazione  $\underline{x}(P)$  per sottintendere  $\underline{x}(\underline{y}^{-1}(P))$ , dove  $\underline{y}$  è una parametrizzazione regolare di  $P$  sulla superficie studiata.

## 2.1 Definizioni preliminari

### 2.1.1 Parametrizzazioni regolari

**Definizione 2.1** (Parametrizzazione regolare).

Si dice **parametrizzazione regolare** una mappa  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $U$  aperto di  $\mathbb{R}^2$  tale che:

- $\underline{x}$  è iniettiva;
- $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0$  per ogni  $(u, v) \in U$  (**regolarità**);
- $\underline{x}^{-1}$  è continua.

*Osservazione 2.2.*

Osserviamo che  $J\underline{x} = [\underline{x}_u \ \underline{x}_v]$ . Allora richiedere la regolarità è equivalente a richiedere che  $\text{rk}(J\underline{x})$  sia sempre massimo, ovvero:

$$\text{rk}(J\underline{x}) = 2.$$

**Proposizione 2.3.**

Ogni parametrizzazione regolare è un diffeomorfismo  $C^\infty$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$  una parametrizzazione regolare surgettiva su  $\Sigma$ . Sia  $(u_0, v_0) \in U$ . Dal momento che  $\underline{x}$  è regolare, esiste un minore  $2 \times 2$  in  $J\underline{x}(u_0, v_0)$  invertibile. Sia  $\pi$  la proiezione da  $\mathbb{R}^3$  sul piano  $\text{span}(e_i, e_j) \cong \mathbb{R}^2$ , dove  $i$  e  $j$  sono gli indici delle righe del minore rispetto a  $J\underline{x}(u_0, v_0)$ .

Allora  $J(\pi \circ \underline{x})(u_0, v_0)$  è invertibile, e per il Teorema di invertibilità locale,  $\pi \circ \underline{x}$  è localmente invertibile. Dacché  $\underline{x}^{-1}$  è localmente uguale a  $(\pi \circ \underline{x})^{-1} \circ \pi^{-1}$ , che è composizione di funzioni  $C^\infty$ , si ricava che  $\underline{x}$  è un diffeomorfismo  $C^\infty$  locale. Dal momento che  $\underline{x}$  è però iniettiva, si ricava che è anche un diffeomorfismo  $C^\infty$ .  $\square$

### 2.1.2 Superficie

**Definizione 2.4** (Superficie).

Una **superficie** è un sottinsieme  $\Sigma$  di  $\mathbb{R}^3$  tale per cui ogni punto  $P$  di  $\Sigma$  ammette una parametrizzazione regolare  $\underline{x}_P$  la cui immagine sia contenuta in  $\Sigma$  e che sia intorno di  $P$  in  $\Sigma$ . Ci riferiremo a  $\underline{x}_P$  come a una **parametrizzazione regolare per  $P$** .

*Osservazione 2.5.*

Chiaramente, se  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  è una parametrizzazione regolare, allora  $\underline{x}(U)$  è una superficie.

**Proposizione 2.6.**

$\Sigma$  è una superficie se e solo se ogni suo punto ammette una parametrizzazione regolare della forma  $\underline{x} : B_\varepsilon(0) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$ .

*Dimostrazione.*

Siccome ogni parametrizzazione regolare  $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$  ha come dominio un aperto, possiamo restringerci a una palla di raggio  $\varepsilon$  di  $\underline{x}^{-1}(P)$ . Tramite traslazione possiamo infine riportare  $\underline{x}^{-1}(P)$  al centro, ottenendo una parametrizzazione del tipo desiderato.  $\square$

**Proposizione 2.7.**

Se  $\Sigma$  è una superficie, una funzione  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$  è continua se e solo se  $f \circ \underline{x}$  è una funzione continua per ogni parametrizzazione regolare  $\underline{x}$  di un punto di  $\Sigma$ .

*Dimostrazione.*

Deriva dal fatto che una funzione è continua se e solo se è localmente continua.  $\square$

## 2.2 Classi fondamentali di superfici

### 2.2.1 Superfici di rotazione

**Definizione 2.8** (Superficie di rotazione).

Sia  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva parametrizzata della forma  $(a(t), 0, b(t))$  tale che  $\alpha$  è regolare e omeomorfismo locale. Si definisce allora la **superficie di rotazione** (intorno all'asse  $z$ ) di  $\alpha$  come l'immagine della seguente parametrizzazione canonica:

$$\underline{x}(u, v) = (a(u) \cos(v), a(u) \sin(v), b(u)).$$

**Definizione 2.9** (Paralleli e meridiani).

Sia  $\Sigma$  una superficie di rotazione con parametrizzazione canonica  $\underline{x}$ . Allora l'immagine della curva  $\alpha_{u_0}(t) = \underline{x}(u_0, t)$  è detta **parallelo**, mentre quella della curva  $\gamma_{v_0}(t) = \underline{x}(t, v_0)$  è detta **meridiano**.

I paralleli sono dunque le intersezioni della superficie con i piani della forma  $\{z = k\}$ , mentre i meridiani lo sono rispetto ai piani della forma  $\{ax + by = 0\}$ .

**Proposizione 2.10.**

*Una superficie di rotazione è effettivamente una superficie, poiché la sua parametrizzazione canonica è regolare.*

## 2.2.2 Grafici, valori regolari e superfici di livello

**Proposizione 2.11** (Il grafico di una funzione  $C^\infty$  a valori reali con dominio  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  è una superficie).

*Il grafico  $\Gamma_f$  di una funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  con  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  è parametrizzato come  $\underline{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ , ed è dunque una superficie.*

**Definizione 2.12.**

Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  una funzione liscia. Allora si dice che  $a \in f(A)$  è un **valore regolare** per  $f$  se:

$$\nabla f(p) \neq 0, \quad \forall p \in f^{-1}(a).$$

**Proposizione 2.13.**

*Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  una funzione liscia. Allora, se  $a$  è un valore regolare per  $f$ ,  $f^{-1}(a)$  è una superficie ed è detta **superficie di livello a rispetto a  $f$** .*

*Dimostrazione.*

La tesi discende direttamente come applicazione del Teorema della funzione implicita. Infatti, se  $a$  è un valore regolare,  $f^{-1}(a)$  è localmente un grafico su ogni suo punto. Allora, per la Proposizione 2.11,  $f^{-1}(a)$  è una superficie.  $\square$

## 2.3 Piano tangente e orientabilità

### 2.3.1 Piano tangente e compatibilità tra parametrizzazioni regolari diverse

**Definizione 2.14** (Funzione di transizione).

Siano  $\underline{x}, \underline{y} : U, U' \rightarrow \mathbb{R}^3$  due parametrizzazioni regolari per  $P$  su una superficie  $\Sigma$  aventi stessa immagine. Si definisce allora la **funzione di transizione**  $f_{\underline{x}, \underline{y}} : U \rightarrow U'$  da  $\underline{x}$  a  $\underline{y}$  come:

$$f_{\underline{x}, \underline{y}} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{y}^{-1} \circ \underline{x},$$

in modo tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} & \Sigma & \\ \underline{x} \nearrow & & \nwarrow \underline{y} \\ U & \xrightarrow{f_{\underline{x}, \underline{y}}} & U' \end{array}$$

**Proposizione 2.15.**

*Una funzione di transizione  $f_{\underline{x}, \underline{y}}$  è un diffeomorfismo  $C^\infty$ .*

*Dimostrazione.*

Dal momento che  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$  sono diffeomorfismi  $C^\infty$  per la Proposizione 2.3, essendo  $f$  composizione di variazioni di queste, anche  $f$  lo è.  $\square$

**Proposizione 2.16.**

*Siano  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$  due parametrizzazioni regolari per  $P$  su una superficie  $\Sigma$ . Allora vale:*

$$\text{span}(\underline{x}_u(P), \underline{x}_v(P)) = \text{span}(\underline{y}_u(P), \underline{y}_v(P)).$$

*Dimostrazione.*

Possiamo assumere senza perdita di generalità che le immagini di  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$  (basta prendere l'intersezione delle immagini).

Posto allora  $f_{\underline{x}, \underline{y}}(s, t) = (u(s, t), v(s, t))$ , vale  $\underline{x}(s, t) = \underline{y}(u(s, t), v(s, t))$ , e quindi:

$$\begin{cases} \underline{x}_s(P) = u_s(P) \cdot \underline{y}_u(P) + v_s(P) \cdot \underline{y}_t(P), \\ \underline{x}_t(P) = u_t(P) \cdot \underline{y}_u(P) + v_t(P) \cdot \underline{y}_t(P). \end{cases}$$

Dal momento che  $Jf_{\underline{x}, \underline{y}}(P)$  ha rango 2, allora il precedente sistema induce un cambio di base da  $\{\underline{x}_u(P), \underline{x}_v(P)\}$  a  $\{\underline{y}_u(P), \underline{y}_v(P)\}$ , da cui la tesi.  $\square$

**Definizione 2.17** (Piano tangente).

Sia  $\Sigma$  una superficie. Allora, se  $P$  è un punto di  $\Sigma$ , si definisce il **piano tangente**  $T_P \Sigma$  di  $P$  rispetto a  $\Sigma$  come:

$$T_P \Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \text{span}(\underline{x}_u(P), \underline{x}_v(P)),$$

dove  $\underline{x}$  è una qualsiasi parametrizzazione regolare di  $P$ .

### 2.3.2 Versori normali e orientabilità

**Definizione 2.18** (Versore normale su  $\underline{x}$ ).

Sia  $\underline{x}$  una parametrizzazione regolare di un punto  $P$  su una superficie  $\Sigma$ . Definiamo il **versore normale**  $n_{\underline{x}}(P)$  come:

$$n_{\underline{x}}(P) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|}.$$

**Proposizione 2.19.**

*Due parametrizzazioni regolari  $\underline{x}, \underline{y} : U, U' \rightarrow \Sigma$  con stessa immagine hanno stessa normale in ogni punto se e solo se la funzione di transizione ha in ogni punto jacobiano di determinante positivo.*

*Dimostrazione.*

Segue dal sistema trovato nella dimostrazione della Proposizione 2.16.  $\square$

**Definizione 2.20** (Parametrizzazioni regolari compatibili).

Due parametrizzazioni regolari  $\underline{x}, \underline{y} : U, U' \rightarrow \Sigma$  si dicono **compatibili** se l'intersezione delle immagini è vuota o se hanno stessa normale sull'intersezione delle immagini.

**Definizione 2.21** (Superficie orientabile).

Una superficie  $\Sigma$  si dice **orientabile** se è ricoperta da parametrizzazioni regolari a due a due compatibili.

**Proposizione 2.22.**

Una superficie  $\Sigma$  è orientabile se e solo se esiste una funzione continua  $\underline{n} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale per cui  $\underline{n}(P)$  sia unitario e perpendicolare a  $T_P\Sigma$  per ogni punto  $P$  di  $\Sigma$ .

**Corollario 2.23.**

Ogni superficie  $\Sigma$  di livello  $\ell$  rispetto a  $f$ , per  $f$  liscia e  $\ell$  regolare, è orientabile.

*Dimostrazione.*

Il gradiente  $\nabla f / \|\nabla f\|$  è un campo vettoriale unitario e ortogonale a  $T_P\Sigma$  per ogni punto  $P$ . Si conclude per la Proposizione 2.22.  $\square$

**$\triangle$  Attenzione.** Ogni superficie è localmente orientabile!

È sufficiente prendere per ogni punto come ricoprimento la sua stessa parametrizzazione regolare.

## Parte 3

# Curve su superfici

### 3.1 Piano tangente e derivata direzionale

#### 3.1.1 Coordinate di una curva rispetto a una parametrizzazione regolare

**Proposizione 3.1.**

Sia  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrizzazione regolare e sia  $\alpha : I \rightarrow \underline{x}(U)$  una curva. Allora  $\alpha$  si scrive come:

$$\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t)),$$

con  $u(t), v(t) : I \rightarrow U$  funzioni di classe  $C^\infty$ .

*Dimostrazione.*

Segue immediatamente dalla Proposizione 2.3.  $\square$

#### 3.1.2 Relazione tra il piano tangente e le velocità delle curve

**Proposizione 3.2** (Il piano tangente è l'insieme delle velocità delle curve sulla superficie considerata).

Sia  $\Sigma$  una superficie. Allora vale:

$$T_P \Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{ \alpha'(P) \mid \alpha : I \rightarrow \Sigma \text{ curva con } P \in \alpha(I) \}.$$

*Dimostrazione.*

Sia  $P = \underline{x}(0, 0)$ , dove  $\underline{x} : B_\varepsilon \rightarrow \Sigma$  è una parametrizzazione regolare di  $P$ . È sufficiente osservare che ogni vettore tangente è una combinazione lineare della forma  $\lambda \underline{x}_u + \mu \underline{x}_v$ ; allora la curva  $\alpha(t) = \underline{x}(t\lambda, t\mu)$  ha velocità  $\lambda \underline{x}_u + \mu \underline{x}_v$  in  $P$ .  $\square$

#### 3.1.3 Funzioni lisce sulla superficie e derivata direzionale

**Definizione 3.3** (Funzioni  $C^\infty$  sulla superficie).

Sia  $\Sigma$  una superficie. Una funzione  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice di classe  $C^\infty$  se per ogni parametrizzazione regolare  $\underline{x}$  di ogni punto  $P \in \Sigma$ ,  $f \circ \underline{x}$  è di classe  $C^\infty$ .

**Proposizione 3.4.**

Sia  $\Sigma$  una superficie. Sia  $P \in \Sigma$  e venga dato  $\xi \in T_P \Sigma$ . Sia data una funzione  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Se  $\alpha, \beta$  sono due curve su  $\Sigma$  passanti per  $P$  al tempo 0 con  $\alpha'(0) = \beta'(0) = \xi$ , allora:

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \beta)'(0).$$

*Dimostrazione.*

Sia  $\underline{x}$  una parametrizzazione regolare di  $P$  rispetto a  $\Sigma$ . Allora, per la Proposizione 3.1,  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$  e  $\beta(t) = (p(t), q(t))$ , con  $u, v, p, q$  lisce.

Pertanto:

$$\begin{aligned} (f \circ \alpha)'(0) &= \left. \frac{d}{dt} (f \circ \underline{x})(u(t), v(t)) \right|_{t=0} \\ &= (f \circ \underline{x})_u u'(0) + (f \circ \underline{x})_v v'(0). \end{aligned}$$

Osserviamo che  $(u'(0), v'(0)) = (p'(0), q'(0))$ , dal momento che rappresentano le coordinate in  $U$  del vettore  $\xi$ . La tesi segue allora dal fatto che il membro a destra diventa  $(f \circ \beta)'(0)$ .  $\square$

**Definizione 3.5** (Derivata direzionale).

Sia  $\Sigma$  una superficie. Sia  $P \in \Sigma$  e venga dato  $\xi \in T_P \Sigma$ . Allora, data una funzione  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ , la derivata direzionale  $D_\xi f(P)$  è definita come:

$$D_\xi f(P) \stackrel{\text{def}}{=} (f \circ \alpha)'(0),$$

dove  $\alpha$  è una qualsiasi curva su  $\Sigma$  passante per  $P$  al tempo 0 con  $\alpha'(0) = \xi$ .

### 3.2 Operatore forma, I e II forma fondamentale

#### 3.2.1 Operatore forma e prime proprietà

**Proposizione 3.6.**

Sia  $\underline{x}$  una parametrizzazione regolare di un punto  $P$  su  $\Sigma$ . Allora  $D_\xi \underline{n}(P) \in T_P \Sigma$ , dove  $\underline{n}$  è la normale indotta da  $\underline{x}$  localmente.

*Dimostrazione.*

Sia  $\alpha$  una curva su  $\Sigma$  passante per  $P$  al tempo 0 con  $\alpha'(0) = \xi$ . Osserviamo che  $\underline{n}(\alpha(t)) \cdot \underline{n}(\alpha(t)) = 1$ , e quindi:

$$2(D_\xi \underline{n}(P) \cdot \underline{n}(P)) = 0,$$

da cui la tesi.  $\square$

**Definizione 3.7** (Operatore forma).

Data una  $\underline{x}$  una parametrizzazione regolare di un punto  $P$  su  $\Sigma$ , si definisce **operatore forma** l'endomorfismo  $S_P(\xi) : T_P\Sigma \rightarrow T_P\Sigma$  tale per cui:

$$S_P(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} -D_\xi \underline{n}(P).$$

*Osservazione 3.8.*

Osserviamo che l'operatore forma è "essenzialmente unico", dal momento che, al variare delle parametrizzazioni, può solo cambiare segno (quello della normale). Tutte le proprietà che ci interessano sono invarianti per cambio di segno, e quindi la scrittura  $S_P$  è "ben definita".

**Lemma 3.9.**

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$ . Sia  $\underline{x}$  una parametrizzazione di  $P$ . Allora per  $\{i, j\} \subseteq \{u, v\}$  vale:

$$S_P(\underline{x}_i) \cdot \underline{x}_j(P) = \underline{n}(P) \cdot \underline{x}_{ij}(P).$$

*Dimostrazione.*

Senza perdita di generalità assumiamo  $P = \underline{x}(0, 0)$ . Sia  $\underline{n}$  la normale indotta dalla parametrizzazione  $\underline{x}$ . Allora vale:

$$\begin{cases} \underline{n} \cdot \underline{x}_u = 0, \\ \underline{n} \cdot \underline{x}_v = 0. \end{cases}$$

Derivando le due equazioni del sistema lungo la curva  $\alpha(t) = \underline{x}(t, 0)$ , otteniamo:

$$\begin{cases} S_P(\underline{x}_u) \cdot \underline{x}_u(P) = \underline{n}(P) \cdot \underline{x}_{uu}(P), \\ S_P(\underline{x}_u) \cdot \underline{x}_v(P) = \underline{n}(P) \cdot \underline{x}_{uv}(P), \end{cases}$$

dove nell'ultima espressione si è applicato il Teorema di Schwarz per sostituire  $\underline{x}_{uv}$  a  $\underline{x}_{vu}$ . Analogamente si ottiene la formula per gli altri due casi.  $\square$

**Proposizione 3.10** (L'operatore forma è autoaggiunto).

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$ . Allora l'operatore forma  $S_P$  è autoaggiunto.

*Dimostrazione.*

Per dimostrare che  $S_P$  è autoaggiunto è sufficiente mostrare che:

$$S_P(\underline{x}_u) \cdot \underline{x}_v = \underline{x}_u \cdot S_P(\underline{x}_v),$$

dacché  $\{\underline{x}_u(P), \underline{x}_v(P)\}$  è una base di  $T_P\Sigma$ . Questo però è immediato dal Lemma 3.9 e dal Teorema di Schwarz.  $\square$

### 3.2.2 I e II forma fondamentale

**Definizione 3.11** (I forma fondamentale).

Sia  $\Sigma$  una superficie. Si definisce **I forma fondamentale** di  $\Sigma$  in  $P$  il prodotto scalare  $I_P : T_P\Sigma \times T_P\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  definito come:

$$I_P(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} v \cdot w,$$

ovverosia è il prodotto canonico di  $\mathbb{R}^3$  ristretto a  $T_P\Sigma$ .

**Definizione 3.12** (II forma fondamentale).

Sia  $\Sigma$  una superficie. Si definisce **II forma fondamentale** di  $\Sigma$  in  $P$  il prodotto scalare  $II_P : T_P\Sigma \times T_P\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  definito come:

$$II_P(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} I_P(S_P(v), w) = S_P(v) \cdot w.$$

*Osservazione 3.13.*

Osserviamo che la II forma fondamentale è ben definita dal momento che  $S_P$  è autoaggiunto per la Proposizione 3.10

*Osservazione 3.14.*

Scelta una parametrizzazione  $\underline{x}$  di  $P$ , le due forme fondamentali e l'operatore forma si rappresentano canonicamente come matrici  $2 \times 2$  nella base  $\{\underline{x}_u, \underline{x}_v\}$ .

**Definizione 3.15** (I forma fondamentale matriciale).

Scelta una parametrizzazione  $\underline{x}$  di  $P$  e data la rappresentazione matriciale di  $I_P$  rispetto a  $\underline{x}$ , definiamo  $E$ ,  $F$  e  $G$  (relativi a  $P$ ) di modo che:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{x}_u \cdot \underline{x}_u & \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v \\ \underline{x}_u \cdot \underline{x}_v & \underline{x}_v \cdot \underline{x}_v \end{pmatrix}.$$

**Definizione 3.16** (II forma fondamentale matriciale).

Scelta una parametrizzazione  $\underline{x}$  di  $P$  e data la rappresentazione matriciale di  $II_P$  rispetto a  $\underline{x}$ , definiamo  $\ell$ ,  $m$ ,  $n$  (relativi a  $P$ ) di modo che:

$$\begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_P(\underline{x}_u) \cdot \underline{x}_u & S_P(\underline{x}_u) \cdot \underline{x}_v \\ S_P(\underline{x}_u) \cdot \underline{x}_v & S_P(\underline{x}_v) \cdot \underline{x}_v \end{pmatrix}.$$

**Proposizione 3.17** (Formula per  $\ell$ ,  $m$  e  $n$ ).

Gli elementi della rappresentazione matriciale di  $II_P$  rispetto a  $\underline{x}$  si calcolano come segue:

$$\ell = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uu}, \quad m = \underline{n} \cdot \underline{x}_{uv}, \quad n = \underline{n} \cdot \underline{x}_{vv},$$

dove  $\underline{n}$  è la normale indotta da  $\underline{x}$ .

*Dimostrazione.*

Segue immediatamente dal Lemma 3.9.  $\square$

**Proposizione 3.18.**

Scelta una parametrizzazione  $\underline{x}$  di  $P$ , le rappresentazioni matriciali di  $I_P$ ,  $II_P$  e  $S_P$  rispetto a  $\underline{x}$  soddisfano la seguente relazione:

$$II_P = I_P \cdot S_P.$$

In particolare vale:

$$\det(S_P) = \frac{\det(II_P)}{\det(I_P)} = \frac{\ell n - m^2}{E G - F^2}.$$

### 3.2.3 Interpretazione geometrica della II forma fondamentale e curvatura normale

**Proposizione 3.19.**

Sia  $\pi$  un piano in  $\mathbb{R}^3$  passante per un punto  $p$  di una superficie  $\Sigma$ . Se  $\pi \neq P + T_P\Sigma$ , allora  $\pi \cap \Sigma$  è localmente parametrizzato come una curva regolare intorno a  $P$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$  è una parametrizzazione regolare di  $P$  e sia  $\pi$  il piano associato all'equazione  $(a, b) \cdot \underline{x} = d$ . Assumiamo che  $P = \underline{x}(u_0, v_0)$ .

Consideriamo la funzione liscia  $f$  a valori reali tale per cui:

$$f(u, v) = (a, b) \cdot \underline{x}(u, v).$$

Osserviamo innanzitutto che  $f^{-1}(d) = \pi \cap \underline{x}(U)$ . Mostriamo che  $f^{-1}(d)$  è una curva regolare intorno a  $P$  mostrando che  $d$  è un valore regolare per  $f$  in  $(u_0, v_0)$ :

$$\nabla f(u_0, v_0) = (a, b) \cdot (\underline{x}_u(P), \underline{x}_v(P)).$$

Dal momento che  $\pi$  è diverso da  $P + T_P\Sigma$ , la normale  $(a, b)$  del piano  $\pi$  non può essere ortogonale a  $(\underline{x}_u(P), \underline{x}_v(P))$ , e quindi  $\nabla f(u_0, v_0) \neq 0$ , da cui la tesi.  $\square$

*Osservazione 3.20.*

Se  $\pi$  è un piano con  $\pi \neq P + T_P\Sigma$ , allora la curva che parametrizza localmente in  $P$  l'intersezione  $\pi \cap \Sigma$  ha come versore tangente uno dei due possibili vettori unitari della giacitura di  $\pi \cap (P + T_P\Sigma)$ .

In particolare esiste una curva p.l.a.  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$  che parametrizza l'intersezione  $\pi \cap \Sigma$  localmente in  $P$  con  $\alpha(0) = P$  e  $\alpha'(0) = w$ , dove  $w$  è il versore sopracitato.

Per tale curva  $\alpha$  vale  $\underline{n}(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) = 0$ , dove  $\underline{n}$  è una normale (locale). Quindi, derivando:

$$S_w P \cdot w = \underline{n}(P) \cdot \dot{T}_\alpha(0),$$

e quindi la quantità  $\underline{n}(P) \cdot \dot{T}_\alpha(0)$  non dipende da  $\alpha$ .

Scegliendo la normale di  $\pi$  in  $T_P\Sigma$ ,  $\dot{T}_\alpha(0)$  è parallelo a  $\underline{n}(P)$ . Ora possono esservi tre casi:

1. Se  $\dot{T}_\alpha(0)$  è nullo, allora

$$S_w P \cdot w = \kappa_\alpha(P) = 0.$$

2. Se  $\dot{T}_\alpha(0)$  è parallelo positivamente a  $\underline{n}(P)$ , allora

$$S_w P \cdot w = \kappa_\alpha(P).$$

3. Se  $\dot{T}_\alpha(0)$  è parallelo negativamente a  $\underline{n}(P)$ , allora:

$$S_w P \cdot w = -\kappa_\alpha(P).$$

Queste osservazioni ci permettono di dare un'ottima interpretazione geometrica al prodotto  $S_w P \cdot w$ , come segue:

**Definizione 3.21** (Curvatura normale).

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$ . Dato un vettore unitario  $w \in T_P\Sigma$ , si definisce la **curvatura normale**  $\kappa_n(P, w)$  in  $P$  di **direzione**  $w$  come:

$$\kappa_n(P, w) \stackrel{\text{def}}{=} S_w P \cdot w,$$

che è quindi, a meno di segno, per l'osservazione precedente, la curvatura di una curva  $\alpha$  passante per  $P$  e ottenuta come intersezione del piano tangente affine  $P + T_P\Sigma$  e di un

piano  $\pi$  ad esso ortogonale, in modo tale che la giacitura di  $\pi \cap P + T_P\Sigma$  sia generata da  $w$ .

Data  $\alpha$  su  $\Sigma$ , definiamo la sua curvatura normale  $\kappa_n$  in  $P$  come:

$$\kappa_{\alpha, n} \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_n(P, T_\alpha(P)).$$

*Osservazione 3.22.*

È immediato osservare che le curvature normali sono “invarianti per rototraslazioni”, ovvero sono le stesse nei punti e nei vettori associati.

### 3.2.4 Direzioni e curvature principali, formula di Eulero

**Definizione 3.23** (Direzioni e curvature principali).

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$ . Gli autospazi dell'operatore forma  $S_P$  sono detti **direzioni principali** in  $P$ , mentre gli autovalori sono detti **curvature principali** in  $P$ , e sono usualmente denotati come  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ .

*Osservazione 3.24.*

Calcolare la curvatura normale  $\kappa_n(P, v) = S_P v \cdot v$  su un  $S_P$ -autovettore unitario  $v$  restituisce la curvatura principale ad esso relativo.

*Osservazione 3.25.*

Poiché  $S_P$  è autoaggiunto,  $S_P$  è ortogonalmente diagonalizzabile, ovvero esiste una base ortonormale di  $T_P\Sigma$  composta da  $S_P$ -autovettori.

Osserviamo inoltre che le curvature principali in  $P$  sono distinte se e solo se  $S_P$  non è un multiplo dell'identità.

**Proposizione 3.26** (Formula di Eulero).

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$  con  $S_P$ -autospazi distinti. Se  $\{v_1, v_2\}$  è una base ortonormale di  $S_P$ -autovettori con  $v_1$  relativo alla curvatura  $\kappa_1$  e  $v_2$  relativo a  $\kappa_2$ , allora vale la **formula di Eulero**:

$$\kappa_n(P, w_\theta) = \cos(\theta)^2 \kappa_1 + \sin(\theta)^2 \kappa_2, \quad (\text{Eulero})$$

dove  $w_\theta \stackrel{\text{def}}{=} \cos(\theta) \kappa_1 + \sin(\theta) \kappa_2$ .

*Dimostrazione.*

Si tratta di una verifica diretta che sfrutta la definizione di  $\kappa_n(P, w_\theta)$ .  $\square$

**Proposizione 3.27.**

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$ . Se  $\kappa_1 \leq \kappa_2$  sono le due curvature principali di  $P$  (eventualmente coincidenti), allora tutte le curvature normali relative a  $P$  sono contenute in  $[\kappa_1, \kappa_2]$ .

*Dimostrazione.*

Segue immediatamente da (Eulero).  $\square$

### 3.2.5 Curvatura gaussiana, media e classificazione di superfici e punti

**Definizione 3.28** (Curvatura gaussiana).

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$ . Si definisce allora la **curvatura gaussiana**  $\kappa(P)$  nel punto  $P$  come il prodotto delle sue curvature principali, ovvero:

$$\kappa(P) \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \det(S_P).$$

**Proposizione 3.29** (Formula per la curvatura gaussiana).

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$ . Vale allora la seguente formula:

$$\kappa(P) = \frac{\ell n - m}{EG - F^2}.$$

*Dimostrazione.*

Segue direttamente dalla Proposizione 3.18.  $\square$

**Proposizione 3.30** (Curvatura media).

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$ . Si definisce allora la **curvatura media**  $H(p)$  nel punto  $P$  come la media delle sue curvature principali, ovvero:

$$H(P) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2} \text{tr}(S_P).$$

*Osservazione 3.31.*

La curvatura gaussiana rimane invariata cambiando la "normale locale" presa, mentre quella media può cambiare al massimo di segno. In particolare, che una delle due sia nulla è invariante per cambio di parametrizzazione locale.

**Definizione 3.32** (Superfici piatte e minimi).

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$ . Una superficie si dice **piatta** se  $K \equiv 0$  su tutta  $\Sigma$ , e **minima** se invece  $H \equiv 0$ .

**Definizione 3.33** (Punti ellittici, iperbolici, parabolici e planari).

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$ . Allora  $P$  si dice:

- **ellittico**: se  $\kappa(P) > 0$  (tutte le curvature normali sono concordi),
- **iperbolico**: se  $\kappa(P) < 0$  (esistono curvature normali discordi),
- **parabolico**: se  $\kappa(P) = 0$ , ma  $S_P \neq 0$  (tutte le curvature normali sono concordi, e ne esiste una nulla),
- **planare**: se  $S_P = 0$  (tutte le curvature normali sono nulle).

**Proposizione 3.34.**

Sia  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie compatta non vuota. Allora  $\Sigma$  ammette un punto ellittico.

*Dimostrazione.*

È sufficiente studiare localmente un punto di norma massima di  $\Sigma$  e mostrare che in tal punto la curvatura gaussiana è positiva.  $\square$

**Proposizione 3.35.**

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$ .

Se  $P$  è un punto ellittico, allora esiste un intorno di  $P$  su  $\Sigma$  contenuto interamente in uno dei due semispazi indotti dal taglio di  $\mathbb{R}^3$  tramite  $T_P \Sigma$ .

Se  $P$  è iperbolico, allora un tale intorno invece non può esistere.

## 3.3 Superfici localmente isometriche e Theorema egregium

### 3.3.1 Conservazione delle lunghezze su superfici localmente isometriche

**Proposizione 3.36.**

Data una parametrizzazione  $\underline{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , si ha  $\ell(\bar{\alpha}) = \ell(\underline{x} \circ \bar{\alpha})$  per ogni curva  $\bar{\alpha} : [a, b] \rightarrow U$  se e solo se  $I_P = I_2$  per ogni punto  $P$  in  $\underline{x}(U)$ .

In altre parole,  $\underline{x}$  preserva le lunghezze delle curve se e solo se  $E \equiv G \equiv 1$  e  $F \equiv 0$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $P$  un punto di  $\underline{x}(U)$  con  $P = \underline{x}(u_0, v_0)$ . Siano  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Si può scegliere una curva  $\bar{\alpha}$  su  $U$  con  $\bar{\alpha}(0) = (u_0, v_0)$  e  $\bar{\alpha}'(0) = (\lambda, \mu)$ .

Preservare le lunghezze di ogni curva vuol dire anche preservare le lunghezze di ogni porzione di  $\bar{\alpha}$ . Questo implica  $\|\bar{\alpha}'\| = \|\alpha'\|$ , dove  $\alpha = \underline{x} \circ \bar{\alpha}$ .

Se  $\bar{\alpha}(t) = (u(t), v(t))$ , allora:

$$\alpha'(0) = \lambda \underline{x}_u(P) + \mu \underline{x}_v(P).$$

L'arbitrarietà di  $\lambda$  e  $\mu$  implica che la mappa  $(a, b) \mapsto a \underline{x}_u(P) + b \underline{x}_v(P)$  sia un'isometria per ogni punto  $P$ , e quindi che  $I_P$  sia l'identità  $I_2$ .  $\square$

**Definizione 3.37** (Isometria locale).

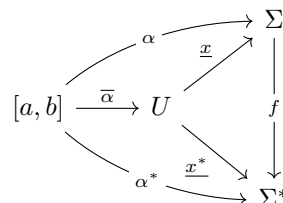
Una parametrizzazione regolare  $\underline{x}$  si dice **isometria locale** se su tutti i punti di  $\underline{x}(U)$  si ha  $E \equiv G \equiv 1$  e  $F \equiv 0$  tramite  $\underline{x}$ .

**Definizione 3.38** (Superfici localmente isometriche).

Siano  $\Sigma$  e  $\Sigma^*$  due superfici di  $\mathbb{R}^3$ . Siano  $P \in \Sigma$  e  $P^* \in \Sigma^*$ . Si dice che  $\Sigma$  e  $\Sigma^*$  sono **localmente isometriche** intorno a  $P$  e  $P^*$  se esistono  $\underline{x} : U \rightarrow \Sigma$  parametrizzazione di  $P$ , e  $\underline{x}^* : U \rightarrow \Sigma^*$  parametrizzazione di  $P^*$  con  $E \equiv E^*$ ,  $F \equiv F^*$  e  $G \equiv G^*$  su  $U$ .

*Osservazione 3.39.*

Passare da un intorno di una superficie a un intorno di una superficie ad essa localmente isometrica conserva le lunghezze.



Se  $\alpha$  è una curva su  $\Sigma$ , allora si può fattorizzare come  $\underline{x} \circ \bar{\alpha}$  con  $\bar{\alpha}(t) = (u(t), v(t))$  (vd. Proposizione 3.1); analogamente si fattorizza la curva ottenuta sulla superficie  $\Sigma^*$  come  $\alpha^* \stackrel{\text{def}}{=} \underline{x}^* \circ \bar{\alpha}$ .

La tesi è equivalente a mostrare che  $f \stackrel{\text{def}}{=} \underline{x}^* \circ \underline{x}$  conserva le velocità delle curve. Ma questo è vero, infatti:

$$\|\alpha'(t)\|^2 = \bar{\alpha}'(t)^\top I_P \bar{\alpha}'(t) = \bar{\alpha}'(t)^\top I_P^* \bar{\alpha}'(t) = \|(\alpha^*)'(t)\|^2,$$

$$\text{e } I_P = I_P^*.$$

*Osservazione 3.40.*

Una superficie  $\Sigma^*$  ottenuta come rototraslazione o riflessione di una superficie  $\Sigma$  è localmente isometrica a  $\Sigma$  nei punti associati.

### 3.3.2 Theorema egregium, simboli di Christoffel e conseguenze

*Osservazione 3.41.*

Osserviamo che, se  $\underline{x}$  è una parametrizzazione regolare, allora  $\{\underline{x}_u, \underline{x}_v, \underline{n}\}$  – dove  $\underline{n}$  è la normale indotta da  $\underline{x}$  – è una base di  $\mathbb{R}^3$  in ogni punto. Pertanto anche  $\underline{x}_{uu}$ ,  $\underline{x}_{uv}$  e  $\underline{x}_{vv}$  dovranno scriversi in questa base.

**Definizione 3.42** (Simbolo di Christoffel).

Sia  $\underline{x}$  una parametrizzazione regolare. Si indica con il **simbolo di Christoffel**  $\Gamma_{ij}^k$  il coefficiente di  $\underline{x}_k$  del vettore  $\underline{x}_{ij}$ , dove  $\{i, j, k\} \subseteq \{u, v\}$ .

*Osservazione 3.43.*

Si osserva subito che vale la seguente formula:

$$\begin{pmatrix} \underline{x}_u \cdot \underline{x}_{ij} \\ \underline{x}_v \cdot \underline{x}_{ij} \end{pmatrix} = I \begin{pmatrix} \Gamma_{ij}^u \\ \Gamma_{ij}^v \end{pmatrix},$$

dove  $I$  è la I forma fondamentale in forma matriciale.

**Teorema 3.44** (Theorema egregium di Gauss).

Sia  $\Sigma$  una superficie di  $\mathbb{R}^3$ . Allora la sua curvatura gaussiana  $\kappa$  è localmente esprimibile in funzione di  $E, F, G$  e le loro derivate.

*Dimostrazione.*

La dimostrazione segue questo schema:

- (i.) Dall'osservazione precedente, i simboli di Christoffel si scrivono in funzione degli  $\underline{x}_k \cdot \underline{x}_{ij}$  tramite la I forma fondamentale.
- (ii.) I  $\underline{x}_k \cdot \underline{x}_{ij}$  si scrivono utilizzando le derivate di  $E, F$  e  $G$ , e quindi i simboli di Christoffel si scrivono in termini di  $E, F, G$  e derivate.
- (iii.) Il termine  $\ell d - m b$ , dove  $b$  e  $d$  sono gli elementi della seconda riga della II forma fondamentale, si scrive come  $E \cdot \kappa$ .
- (iv.) Sviluppando  $\underline{x}_{uuv}$  e  $\underline{x}_{uvu}$  e applicando il Teorema di Schwarz, si ottiene un'espressione di  $\ell d - m b$  in termini dei simboli di Christoffel.

- (v.) Allora  $\ell d - m b$  si scrive in termini di  $E, F$  e  $G$  e le loro derivate per (ii.) e (iv.), e così anche  $\kappa$  per (iii.).

□

**Corollario 3.45.**

Due superfici localmente isometriche hanno stessa curvatura gaussiana nei punti associati.

**Corollario 3.46.**

Un piano e la sfera non sono localmente isometrici.

## 3.4 Trasporto parallelo e campi vettoriali

### 3.4.1 Campi vettoriali e derivata covariante

**Definizione 3.47** (Campo vettoriale (tangente)).

Sia  $\Sigma$  una superficie. Un **campo vettoriale** (tangente) su  $\Sigma$  è una mappa liscia  $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale per cui  $X(P) \in T_P \Sigma$  per ogni  $P \in \Sigma$ .

**Definizione 3.48** (Derivata covariante).

Sia  $X$  un campo vettoriale di  $\Sigma$ . Si definisce allora la sua **derivata covariante** in direzione  $v$  su un punto  $P$  come:

$$\nabla_v X(P) \stackrel{\text{def}}{=} (D_v X(P))^\top \stackrel{\text{def}}{=} \pi_{T_P \Sigma}(D_v X(P)).$$

*Osservazione 3.49.*

In realtà, per definire la derivata covariante di  $X$  in direzione  $v$  è sufficiente che  $X$  sia definita lungo una curva  $\alpha$  passante per  $P$  con velocità  $v$ .

### 3.4.2 Campi paralleli lungo una curva e proprietà del trasporto parallelo

**Definizione 3.50** (Campo parallelo).

Un campo vettoriale (tangente)  $X$  su  $\Sigma$  si dice **parallelo lungo una curva**  $\alpha : I \rightarrow \Sigma$  se:

$$\nabla_{\alpha'(t)} X(\alpha(t)) = 0, \quad \forall t \in I.$$

*Osservazione 3.51.*

Sia  $X$  un campo vettoriale e sia  $\alpha$  una curva su  $\Sigma$ . Poiché  $X$  è una mappa liscia sulla superficie  $\Sigma$ ,  $X \circ \alpha$  si scrive come:

$$X(\alpha(t)) = a(t)\underline{x}_u(\alpha(t)) + b(t)\underline{x}_v(\alpha(t)).$$

Dunque, usando la definizione di campo parallelo,  $X$  è parallelo lungo  $\alpha$  se e solo se soddisfa il seguente sistema, detto **sistema delle equazioni del trasporto parallelo**:

$$(\text{TP}): \begin{cases} a' + a(\Gamma_{uu}^u u' + \Gamma_{uv}^u v') + b(\Gamma_{vu}^u v' + \Gamma_{vv}^u u') = 0, \\ b' + a(\Gamma_{uu}^v u' + \Gamma_{uv}^v v') + b(\Gamma_{vu}^v v' + \Gamma_{vv}^v u') = 0, \end{cases}$$

dove  $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ .

**Proposizione 3.52** (Esistenza e unicità del trasporto parallelo).

Sia  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$  una curva su una superficie  $\Sigma$ . Sia  $X_0$  un vettore di  $T_{\alpha(0)} \Sigma$ . Allora esiste un unico campo vettoriale  $X$  parallelo lungo  $\alpha$  tale per cui  $X(\alpha(0)) = X_0$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $\{\underline{x}_P\}_{P \in \alpha([0,1])}$  una famiglia di parametrizzazioni. Per compattezza di  $[0, 1]$  e continuità di  $\alpha$ , anche  $\alpha([0, 1])$  è compatto. Dunque  $\alpha(I)$  è contenuto in un numero finito delle parametrizzazioni della famiglia scelta in partenza.

È sufficiente dimostrare ora la proposizione sfruttando un'unica parametrizzazione e poi "incollando" i campi ottenuti. Tuttavia questo è ovvio dal momento per il Teorema di esistenza e unicità globale per sistemi lineari di equazioni differenziali applicato al sistema dell'Osservazione 3.51.  $\square$

### Definizione 3.53.

L'immagine in  $\alpha(1)$  del campo  $X$  ottenuto dalla proposizione precedente per estensione parallela da un vettore  $X_0 \in T_{\alpha(0)}\Sigma$  si dice ottenuta per **trasporto parallelo** sulla curva  $\alpha$ .

*Osservazione 3.54.*

Dal momento che il sistema delle equazioni del trasporto parallelo è lineare e omogeneo, combinazioni lineari di soluzioni sono soluzioni, e quindi l'operazione di trasporto parallelo è lineare.

**Proposizione 3.55** (Il trasporto parallelo conserva le distanze).

*L'operazione di trasporto parallelo conserva il prodotto scalare dei vettori, e quindi anche le distanze. Inoltre, manda basi di un piano tangente all'altro mantenendone l'orientazione.*

*Dimostrazione.*

Siano  $X$  e  $Y$  due campi paralleli lungo una stessa curva  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ . Si definisce la funzione  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  in modo tale che:

$$f(t) = X(\alpha(t)) \cdot Y(\alpha(t)).$$

Derivando  $f$  in  $t$  otteniamo:

$$f'(t) = D_{\alpha'(t)}X(\alpha(t)) \cdot Y(\alpha(t)) + X(\alpha(t)) \cdot D_{\alpha'(t)}Y(\alpha(t)).$$

Poiché  $X$  e  $Y$  sono paralleli lungo  $\alpha$ , le due derivate direzionali sono parallele alla normale (locale) in  $\alpha(t)$ , mentre i termini non derivati ne sono perpendicolari. Dunque  $f'(t)$  è nullo, e quindi il prodotto scalare si conserva.

Consideriamo ora la funzione  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tale per cui:

$$\varphi(t) = (X(\alpha(t)) \cdot Y(\alpha(t))) \cdot \underline{n}.$$

Poiché  $\varphi$  è continua e non può essere  $\varphi(t) = 0$  ad alcun tempo  $t$ , essendo  $[0, 1]$  connesso, deve essere necessariamente  $\varphi > 0$  o  $\varphi < 0$  su tutto  $[0, 1]$ , da cui la tesi.  $\square$

## 3.5 Geodetiche

### 3.5.1 Relazione tra geodetiche e trasporto parallelo

#### Definizione 3.56.

Una curva  $\alpha$  su una superficie  $\Sigma$  si dice **geodetica** se il campo  $\alpha'$  è parallelo lungo  $\alpha$ , ovvero sia se:

$$\nabla_{\alpha'}\alpha' = (\alpha'')^\top = 0.$$

*Osservazione 3.57.*

Per le geodetiche è necessario specializzare correttamente le equazioni del trasporto parallelo. Ponendo  $\alpha(t) = \underline{x}(u(t), v(t))$ , otteniamo:

$$(\text{Geo}): \begin{cases} u'' + \Gamma_{uu}^u (u')^2 + 2\Gamma_{uv}^u u'v' + \Gamma_{vv}^u (v')^2 = 0, \\ v'' + \Gamma_{uu}^v (u')^2 + 2\Gamma_{uv}^v u'v' + \Gamma_{vv}^v (v')^2 = 0, \end{cases}$$

#### Proposizione 3.58.

*Sia  $\alpha$  una geodetica su  $\Sigma$ . Allora  $\|\alpha'\|$  è costante.*

*Dimostrazione.*

Derivando  $\alpha' \cdot \alpha'$  si ottiene  $2(\alpha'' \cdot \alpha')$ , che però è nullo dal momento che  $\alpha'' \perp T_\alpha\Sigma$ , da cui la tesi.  $\square$

### 3.5.2 Mappa esponenziale, coordinate normali e intorno normale

#### Proposizione 3.59.

*Sia  $\Sigma$  una superficie e  $q$  un suo punto. Allora per ogni  $v \in T_q\Sigma$  esiste  $\varepsilon > 0$  e un'unica geodetica  $\gamma_v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Sigma$  tale per cui  $\gamma_v(0) = q$  e  $\gamma'_v(0) = v$ .*

*Dimostrazione.*

Segue dall'applicazione del Teorema di Cauchy-Lipschitz per l'esistenza e l'unicità locale di una soluzione per una sistema di equazioni differenziali al sistema dell'Osservazione 3.57.  $\square$

*Osservazione 3.60.*

Possiamo in realtà assumere che  $\gamma_v(t)$  sia definita su  $[0, 1]$  senza alcuna perdita di generalità. Infatti, se  $\gamma_v(t)$  è definita su  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ , la curva  $\gamma_v(st)$  è ben definita per  $t \in [0, 1]$ , dove  $s \in (0, \varepsilon)$ . Per unicità di  $\gamma_{sv}(t)$ , dal momento che  $\gamma_v(st)$  ne rispetta le condizioni iniziali, si ha  $\gamma_v(st) = \gamma_{sv}(t)$ .

*Osservazione 3.61.*

Per compattezza di  $\{v \in T_P\Sigma \mid \|v\| = 1\}$ , esiste un  $\varepsilon_{\min}$  per il quale per ogni vettore  $v$  di norma  $\|v\| < \varepsilon_{\min}$  possiamo considerare la geodetica  $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ .

Dal Teorema di dipendenza liscia dai dati iniziali è ben definita e liscia allora l'applicazione  $v \mapsto \gamma_v(1)$ , dove  $\|v\| < \varepsilon_{\min}$ .

#### Definizione 3.62 (Mappa esponenziale).

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$  e sia  $\underline{x}$  una sua parametrizzazione. Sia:

$$U_P = \{v \in T_P\Sigma \mid \|v\| < \varepsilon_{\min}\},$$

dove  $\varepsilon_{\min}$  è definito secondo l'Osservazione 3.61.

Si definisce allora la **mappa esponenziale**  $\exp_P : U_P \rightarrow \underline{x}(U_P)$  come l'applicazione con la seguente proprietà:

$$\exp_P(v) = \gamma_v(1).$$

#### Definizione 3.63 (Intorno normale).

Sia  $P$  un punto su una superficie  $\Sigma$  e sia  $\underline{x}$  una sua parametrizzazione. Si dice che l'immagine  $N_P \stackrel{\text{def}}{=} \exp_P(U_P)$  è un **intorno normale** di  $P$ .

*Osservazione 3.64.*

Una volta ben definita la mappa esponenziale  $\exp_P$ , possiamo riparametrizzare  $\Sigma$  utilizzando  $\exp_P$ , definendo sul suo dominio naturale l'applicazione:

$$\underline{y}(u, v) = \exp_P(u\underline{e}_1 + v\underline{e}_2),$$

dove  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$  è una base ortonormale di  $T_P\Sigma$ .

Questa mappa, detta indotta dalle **coordinate normali**, soddisfa alcune importanti proprietà:

- $\underline{y}(0, 0) = P$ ,
- $\underline{y}_u(0, 0) = \frac{d}{dt} \exp_P(t\underline{e}_1) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \gamma_{t\underline{e}_1}(1) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \gamma_{\underline{e}_1}(u) \Big|_{t=0} = \underline{e}_1$ ,
- $\underline{y}_v(0, 0) = \dots = \underline{e}_2$ .

### 3.5.3 Lemma di Gauss e minimizzazione locale delle distanze

**Lemma 3.65** (Gauss, le geodetiche sono ortogonali ai cerchi indotti dalla mappa esponenziale).

Sia  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$  una base ortonormale di  $T_P\Sigma$ . Sia  $\varepsilon$  lo stesso valore che definisce  $U_P$ . Sia  $v_k : [0, 2\pi] \rightarrow U_P$  la curva definita come:

$$v_k(t) = k(\cos(t)\underline{e}_1 + \sin(t)\underline{e}_2), \quad k < \varepsilon.$$

Allora ogni geodetica  $\gamma_w$  è ortogonale a  $\exp_P \circ v_k$  per  $k < \varepsilon$  e  $w \in U_P$ .

*Dimostrazione.*

Sia  $\underline{x} : [0, 1] \cdot \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$  definita come:

$$\underline{x}(u, t) = \exp_P(u \cdot v_k(t)) = \gamma_{v_k(t)}(u).$$

Dimostriamo la tesi mostrando che  $\underline{x}_u$  (che parametrizza le geodetiche) e  $\underline{x}_t$  (che parametrizza i cerchi) sono ortogonali.

Osserviamo che:

$$(\underline{x}_u \cdot \underline{x}_t)_u = \underline{x}_{uu} \cdot \underline{x}_t + \underline{x}_u \cdot \underline{x}_{tu}.$$

Inoltre  $\underline{x}_{uu}(u, t_0) = (\gamma_{v_k(t_0)}(u))''$  è normale a  $T_P\Sigma$  dacché  $\gamma_{v_k(t_0)}$  è una geodetica, e quindi  $\underline{x}_{uu} \cdot \underline{x}_t = 0$ .

Ancora  $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_u = \|\gamma_{v_k(t)}\|^2 = k^2$  è costante, e quindi, derivando  $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_u$  per  $t$ , si ottiene anche  $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_{ut} = 0$ .

Pertanto  $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_t$  è costante lungo  $u$ . È sufficiente allora mostrare la tesi per  $u = 0$ :

$$\underline{x}(0, t) = P \implies \underline{x}_t(0, t) = 0,$$

e quindi  $\underline{x}_u \cdot \underline{x}_t = 0$  lungo  $u = 0$ .  $\square$

**Corollario 3.66** (Le geodetiche minimizzano localmente le distanze).

Sia  $P' = \gamma_v(1)$  con  $v \in U_P$  un punto distinto da  $P$ . Se  $\alpha : [0, 1] \rightarrow N_P$  è una curva liscia con  $\alpha(0) = P$  e  $\alpha(1) = P'$ , allora:

$$\ell(\alpha) \geq \ell(\gamma_v).$$

*Dimostrazione.*

Parametrizziamo  $N_P$  usando  $\underline{x}$  come definita nella dimostrazione del Lemma di Gauss (3.65) per un  $k = \|v\|$ .

Per la Proposizione 3.1,  $\alpha$  si scrive come:

$$\alpha(t) = \underline{x}(u(t), \tau(t)),$$

con  $u$  e  $\tau$  lisce. Allora, derivando  $\alpha$  e applicando il Lemma di Gauss (3.65) si ottiene:

$$\|\alpha'\|^2 \geq (u')^2 \|v\|^2.$$

Allora:

$$\ell(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha'\| dt \geq \|v\| (u(1) - u(0)) = \|v\| = \ell(\gamma_v),$$

dove si è usato che  $u(0) = 0$  ( $P$  nelle coordinate normali corrisponde a  $(0, 0)$ ) e che  $u(1) = 1$  ( $P'$  ha già raggio  $k$ ).  $\square$

### 3.5.4 Relazione di Clairaut per le geodetiche sulle superfici di rotazione

**Definizione 3.67** (Angolo di una curva con il parallelo).

Sia  $\Sigma$  una superficie di rotazione con parametrizzazione canonica  $\underline{x}$ . Data una curva  $\gamma$  su di essa, si definisce  $\varphi(\gamma(t))$  come segue:

$$\varphi(\gamma(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(\gamma'(t), \underline{x}_v(\gamma(t))),$$

ovverosia  $\varphi(\gamma(t))$  è l'angolo tra la curva  $\gamma$  in  $\gamma(t)$  e il parallelo a cui appartiene  $\gamma(t)$ .

**Definizione 3.68** (Raggio di una curva rispetto all'asse  $z$ ). Sia  $\Sigma$  una superficie di rotazione. Sia data una curva  $\gamma$  su di essa. Si definisce allora il **raggio di  $\gamma$  rispetto all'asse di rotazione  $z$**  come la distanza di  $\gamma$  dall'asse  $z$ , ovverosia:

$$r(\gamma(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \|\pi_{xy}(\gamma(t))\|.$$

**Proposizione 3.69** (Relazione di Clairaut).

Sia  $\gamma$  una geodetica su una superficie di rotazione  $\Sigma$ . Allora  $\gamma$  soddisfa la **relazione di Clairaut**:

$$r(\gamma(t)) \cdot \cos(\varphi(\gamma(t))) = \text{cost.} \quad (\text{Clairaut})$$

Inoltre una curva soddisfacente la relazione di Clairaut che non parametrizza un parallelo è una geodetica.

*Osservazione 3.70.*

Sono geodetiche anche le curve soddisfacenti (Clairaut) che parametrizzano paralleli, a patto che, se  $\Sigma$  è una rotazione sulla funzione  $f$ , valga  $f' = 0$  sui punti della geodetica; ovverosia, in un certo senso, sono geodetiche i “paralleli stazionari”.

### 3.5.5 Curvatura geodetica

*Osservazione 3.71.*

Sia  $\alpha$  una curva di Frenet su una superficie  $\Sigma$ . Osserviamo che  $N_\alpha$  è perpendicolare a  $T_\alpha$ , e quindi dovrà scriversi in una qualche combinazione lineare della base ortonormale  $\{\underline{n}, \underline{n} \times T_\alpha\}$  di  $(T_\alpha)^\perp$ , dove  $\underline{n}$  è una normale (locale).

Sappiamo già dall'Osservazione 3.20 che  $\dot{T}_\alpha \cdot \underline{n}$  è la curvatura normale  $\kappa_{\alpha,n}$ . Ha quindi senso definire il seguente oggetto matematico:

**Definizione 3.72** (Curvatura geodetica).

Sia  $\alpha$  una curva di Frenet su una superficie  $\Sigma$ . Si definisce la **curvatura geodetica** di  $\alpha$  nel punto  $P$  come:

$$\kappa_{\alpha,g} = \dot{T}_\alpha(P) \cdot (\underline{n}(P) \times T_\alpha(P)),$$

dove  $\underline{n}$  è una normale (locale) su  $\Sigma$ .

*Osservazione 3.73.*

Quindi  $N_\alpha$  si scrive come:

$$N_\alpha = \kappa_{\alpha,n} \underline{n} + \kappa_{\alpha,g} (\underline{n} \times T_\alpha),$$

da cui si ricava immediatamente la seguente relazione:

$$\kappa_\alpha^2 = \kappa_{\alpha,n}^2 + \kappa_{\alpha,g}^2.$$

**Proposizione 3.74** (In una geodetica curvatura normale e curvatura della curva coincidono).

Sia  $\alpha$  una curva p.l.a. di Frenet su una superficie  $\Sigma$ . Allora  $\alpha$  è una geodetica se e solo se:

$$\kappa_{\alpha,g} \equiv 0,$$

ovverosia se e solo se:

$$\kappa_\alpha \equiv \kappa_{\alpha,n}.$$

*Dimostrazione.*

Infatti, se  $\alpha$  è una geodetica, allora  $\alpha''$  è perpendicolare a  $T_P \Sigma$ . Quindi, dal momento che  $\alpha$  è p.l.a., si deve avere  $N_\alpha(P)$  perpendicolare a  $T_P \Sigma$ , ossia parallelo a  $\underline{n}$ . Il viceversa è analogo.  $\square$

## 3.6 Integrazione e teorema di Gauss-Bonnet

### 3.6.1 Prime definizioni

**Definizione 3.75** (Curva chiusa).

Una curva (non necessariamente liscia)  $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$  si dice **chiusa** se  $\alpha(a) = \alpha(b)$ .

**Definizione 3.76** (Curva semplice).

Una curva (non necessariamente liscia)  $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$  si dice **semplice** se  $\alpha(t) = \alpha(t')$  può avvenire solo sugli estremi  $a, b$ , ovverosia non è autointersecante.

**Definizione 3.77** (Curva regolare a tratti).

Una curva (non necessariamente liscia)  $\alpha : [a, b] \rightarrow \Sigma$  si dice **regolare a tratti** se esiste una partizione  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_\ell = b$  di  $[a, b]$  tale per cui  $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$  è regolare per ogni  $i < \ell$ .

### 3.6.2 Regione di una superficie e area

**Definizione 3.78** (Regione).

Un sottosinsieme  $R$  di una superficie  $\Sigma$  si dice **regione** se è un chiuso nella topologia di  $\Sigma$ , il cui bordo è traccia di una curva semplice, chiusa e regolare a tratti.

*Osservazione 3.79.*

Dal sistema trovato nella dimostrazione della Proposizione 2.16 segue  $\underline{x}_s \times \underline{x}_t = \det(Jf_{\underline{x},y})(\underline{y}_u \times \underline{y}_v)$ . Da ciò segue facilmente tramite un cambio di variabili che:

$$\iint_{\underline{x}^{-1}(R)} \|\underline{x}_s \times \underline{x}_t\| ds dt = \iint_{\underline{y}^{-1}(R)} \|\underline{y}_u \times \underline{y}_v\| du dv.$$

**Definizione 3.80** (Area di una regione).

Sia  $R$  una regione di  $\Sigma$  contenuta dentro l'immagine di una parametrizzazione  $\underline{x}$ . Si definisce allora la sua **area** come:

$$A(R) \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\underline{x}^{-1}(R)} \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| du dv,$$

che, per l'Osservazione 3.79, è invariante al cambio di parametrizzazione.

**Proposizione 3.81** (Formula per  $\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\|$ ).

Per ogni coppia di vettori  $v, w$  vale la seguente relazione:

$$\|v \times w\|^2 + \|v \cdot w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2.$$

Applicando questa identità a  $\underline{x}_u$  e  $\underline{x}_v$ , si ottiene la seguente formula (relativa a  $\underline{x}$ ):

$$\|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| = \sqrt{EG - F^2}.$$

### 3.6.3 Integrazione rispetto a una regione

**Definizione 3.82** (Integrazione rispetto all'area).

Se  $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione liscia, si definisce il suo integrale rispetto a una regione  $R$  di  $\Sigma$  come segue:

$$\int_R \varphi dA \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\underline{x}^{-1}(R)} (\varphi \circ \underline{x}) \|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\| du dv.$$

*Osservazione 3.83.*

Ponendo  $\varphi \equiv 1$ , si ottiene:

$$\int_R dA = A(R).$$

### 3.6.4 Angoli esterni, teorema di Gauss-Bonnet locale e corollario

**Definizione 3.84** (Angoli esterni).

Sia  $R$  una regione di una superficie  $\Sigma$ . Se  $\alpha$  ne parametrizza il bordo, ed è regolare a tratti con tempi di non regolarità  $t_1, t_2, \dots, t_n$  si definiscono gli **angoli esterni** di  $R$  come:

$$\varepsilon_i \stackrel{\text{def}}{=} \theta(\alpha'_+(t_i), \alpha'_-(t_{i+1})),$$

dove  $\alpha_+$  e  $\alpha_-$  indicano rispettivamente la derivata sinistra e quella destra.

**Teorema 3.85** (Gauss-Bonnet locale).

Sia  $R \subseteq \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$  una regione semplicemente connessa con angoli esterni  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ . Allora vale la seguente identità:

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds + \int_R \kappa dA + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 2\pi. \quad (\text{GBL})$$

**Definizione 3.86** (Angoli interni).

Sia  $R$  una regione di una superficie  $\Sigma$ . Se  $\alpha$  ne parametrizza il bordo, ed è regolare a tratti con tempi di non regolarità  $t_1, t_2, \dots, t_n$  si definiscono gli **angoli interni** di  $R$  come:

$$\iota_i \stackrel{\text{def}}{=} \pi - \varepsilon_i,$$

dove  $\alpha_+$  e  $\alpha_-$  indicano rispettivamente la derivata sinistra e quella destra.

**Corollario 3.87.**

Sia  $T \subseteq \underline{x}(U) \subseteq \Sigma$  una triangolo su  $\Sigma$ , ovvero sia una regione con tre punti non regolari sul bordo, collegati tramite geodetiche. Allora vale:

$$\int_R \kappa dA = \iota_1 + \iota_2 + \iota_3 - \pi.$$

*Dimostrazione.*

Segue immediatamente dalla definizione di angolo interno e dal Teorema di Gauss-Bonnet locale (3.85), dacché  $\kappa_g \equiv 0$  lungo le geodetiche.  $\square$

**Corollario 3.88.**

In un piano, la somma degli angoli interni di un triangolo è esattamente  $\pi$ . Sulla sfera, invece è strettamente maggiore di  $\pi$ . Su una sella è invece strettamente minore.

*Dimostrazione.*

Segue immediatamente dal Corollario 3.87, visto che su un piano si ha  $\kappa \equiv 0$ , su una sfera  $\kappa > 0$  e su una sella  $\kappa < 0$ .  $\square$

### 3.6.5 Superfici orientate con bordo e triangolarizzazione

**Definizione 3.89** (Superficie orientata con bordo).

Si dice che  $\Sigma$  è una **superficie orientata con bordo** (eventualmente sconnesso) se:

$$\Sigma = \hat{\Sigma} \setminus \left( \bigcup_{i=1}^n R_i \right),$$

dove  $\hat{\Sigma}$  è una superficie orientata, compatta con  $\partial \hat{\Sigma} = \emptyset$ , e le  $R_i$  sono regioni di  $\hat{\Sigma}$ .

In tal caso si pone:

$$\partial \Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^n \partial R_i,$$

mentre i suoi angoli interni/esterni diventano quelli delle singoli regioni.

**Definizione 3.90** (Triangolarizzazione).

Una **triangolarizzazione** di una superficie  $\Sigma$  è una famiglia  $\{\Delta_\lambda\}_{\lambda=1}^n$  di insiemi tali per cui valgono le seguenti proprietà:

- $\Sigma = \bigcup_{\lambda=1}^n \Delta_\lambda$ ,
- $\Delta_\lambda$  è l'immagine di un triangolo euclideo tramite una parametrizzazione regolare compatibile con l'orientazione di  $\Sigma$ .
- Se  $\lambda \neq \mu$ , allora  $\Delta_\lambda \cap \Delta_\mu$  può essere vuoto, un lato comune e un singolo vertice.
- Se  $\Delta_\lambda$  e  $\Delta_\mu$  hanno in comune un lato, allora lo percorrono con orientazioni opposte.
- $\Delta_\lambda \cap \partial \Sigma$  può essere vuoto, un lato o un vertice.

### 3.6.6 Teorema di Radó e caratteristica di Eulero

**Teorema 3.91** (Radó).

Ogni superficie orientata con bordo ammette una triangolarizzazione.

**Definizione 3.92** (Caratteristica di Eulero).

Sia  $\tau = \{\Delta_\lambda\}_{\lambda=1}^n$  una triangolarizzazione di una superficie orientata con bordo. Allora si definisce la sua **caratteristica di Eulero** come:

$$\chi(\Sigma) \stackrel{\text{def}}{=} V - L + T,$$

dove  $V$  è il numero di vertici di  $\tau$ ,  $L$  è il numero di lati e  $T$  è il numero di triangoli.

**Fatto 3.93.**

La caratteristica di Eulero non dipende dalla triangolarizzazione scelta.

### 3.6.7 Teorema di Gauss-Bonnet globale e classificazione delle superfici chiuse, orientabili e connesse

**Teorema 3.94** (Gauss-Bonnet globale).

Sia  $\Sigma$  una superficie orientata con bordo con angoli esterni  $\{\varepsilon_i\}_i$ . Allora vale la seguente identità:

$$\int_{\partial \Sigma} \kappa_g ds + \int_{\Sigma} \kappa dA + \sum_i \varepsilon_i = 2\pi \chi(\Sigma). \quad (\text{GBG})$$

*Dimostrazione.*

La dimostrazione segue i prossimi due punti:

1. Si sceglie una triangolarizzazione di  $\Sigma$  grazie al Teorema di Radó (3.91) e si applica il Teorema di Gauss-Bonnet locale (3.85) ad ogni triangolo.
2. Si sommano le varie identità date da (GBL). In questo modo i bordi interni si semplificano (sono lati in comune tra due triangoli, quindi percorsi in sensi opposti), ottenendo  $\int_{\partial\Sigma} \kappa_g ds$ . Allora stesso modo gli angoli interni della triangolarizzazione si sommano a  $2\pi(L - V)$ , mentre i  $2\pi$  si sommano a  $T$ .

□

**Corollario 3.95.**

Se  $\Sigma$  è una superficie orientata compatta con  $\partial\Sigma = \emptyset$ , allora:

$$\boxed{\int_{\Sigma} \kappa dA = 2\pi\chi(\Sigma).}$$

**Definizione 3.96** (Superficie chiusa).

Una superficie  $\Sigma$  si dice **chiusa** se è compatta e  $\partial\Sigma = \emptyset$ .

**Teorema 3.97** (classificazione delle superfici chiuse, orientabili e connesse).

A meno di omeomorfismo, le superfici chiuse, orientabili e connesse sono le superfici di genere, tali per cui  $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g$ .

**Corollario 3.98.**

Sia  $\Sigma$  una superficie chiusa e orientabile non omeomorfa alla sfera. Allora su  $\Sigma$  esistono sia punti ellittici, che iperbolici, che parabolici.