Note del corso di Fisica 1

Gabriel Antonio Videtta

21 marzo 2023

Moto di un corpo in un mezzo viscoso

Definizione. Si definisce *forza viscosa* una particolare forza analoga a quella di attrito, dipendente dalla sola velocità in un corpo omogeneo.

Osservazione. Riguardo la forza viscosa si possono enumerare alcune proprietà.

- ▶ Come la forza di attrito, la forza viscosa ha verso contrario rispetto alla velocità ($\hat{F} = -\hat{v}$).
- ▶ In base alle caratteristiche del mezzo nel quale il corpo si muove, esiste una certa velocità critica v_{cr} tale per cui $v < v_{cr} \implies \vec{F} = -\beta\vec{v}$, dove β è una costante positiva (**legge di Stokes**).
- ▶ Per $v > v_{cr}$, la legge di Stokes non è più valida.

Esempio. Un esempio di forza viscosa è la resistenza aerodinamica al moto del proiettile, spesso trascurata.

Osservazione. La costante β della legge di Stokes dipende dalla viscosità del mezzo e dalle dimensioni e dalla forma del corpo.

Esempio. (senza alcuna forza) Si pongano le condizioni $t_0 = 0$ e $\vec{v_0} = \vec{v}(t_0) \neq 0$. Se non agiscono altre forze sul corpo, si starà allora trattando un moto unidimensionale. Si considera allora il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} F = ma, \\ F = -\beta v, \end{cases}$$

da cui si ricava che:

$$ma = -\beta v \implies \dot{v} = -\frac{\beta}{m} v.$$

Si definisce la costante $\tau = \frac{m}{\beta}$, la cui unità di misura è il secondo.
L'eq. differenziale si riscrive allora come:

$$\dot{v} = -\frac{1}{\tau} v.$$

Risolvendo quest'eq. differenziale, si ottiene allora dunque che:

$$v(t) = ce^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Poiché $c = v(t_0) = v_0$, si conclude dunque che:

$$\begin{cases} v(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \\ a(t) = -\frac{1}{\tau} v(t). \end{cases}$$

In particolare, integrando la velocità, si ottiene lo spostamento:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t) dt = x_0 + v_0 \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Quindi, la distanza percorsa all'infinito[1] è data da $x_\infty - x_0 = v_0 \tau$, dove $x_\infty = \lim_{t \to \infty} x(t) = x_0 + v_0 \tau$.

Osservazione. Si osserva che la velocità inizia a diventare trascurabile dopo alcuni periodi di τ.

Esempio. (con forza di gravità[2]) Si supponga che $\vec{v_0}$ ed $\vec{F} = \vec{F_0}$ siano paralleli, e che dunque il moto sia ancora completamente unidimensionale. Si deve ora considerare il seguente sistema di forze:

$$\begin{cases} \vec{F_v} = -\beta \vec{v}, \\ \vec{F} = \vec{F_0} = m\vec{g} \end{cases},$$

ossia, passando alle coordinate unidimensionali:

$$\begin{cases} F_v = -\beta v, \\ F = mg. \end{cases}$$

Da questo sistema si ottiene l'eq. del sistema:

$$F = mg - \beta v \implies m\dot{v} = mg - \beta v \implies \dot{v} = g - \frac{1}{\tau} v,$$

[1] Ossia, con buona approssimazione, dopo alcuni periodi di τ.
[2] In generale, con qualsiasi forza costante.

ossia un'eq. differenziale la cui associata omogenea è esattamente quella analizzata nello scorso esempio. Allora la soluzione generale è data dalla somma della soluzione omogenea a quella particolare $v = \tau g$, detta *velocità limite* v_{lim}:

$$v(t) = ce^{-\frac{t}{\tau}} + \tau g.$$

Ponendo allora $v(0) = v_0$, si ricava che $v_0 = c - \tau g \implies c = v_0 - \tau g$. Quindi si conclude che:

$$v(t) = (v_0 - v_{lim})e^{-\frac{t}{\tau}} + v_{lim},$$

da cui chiaramente si osserva che $v(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} v_{lim}$.

Esempio. (approssimazione al moto uniformemente accelerato) Si assumano $t \ll \tau$ e $v_0 \ll v_{lim}$. Allora $\frac{t}{\tau} \ll 1$. Pertanto si può approssimare $e^{-\frac{t}{\tau}}$ con $1 - \frac{t}{\tau}$. In questo modo si ricava che:

$$v(t) = (v_0 - v_{lim})(1 - \frac{t}{\tau}) + v_{lim} = v_0 - \frac{v_0}{\tau}t + \frac{v_{lim}}{\tau}t \overbrace{\approx}^{v_0 \ll v_{lim}} v_0 + \frac{v_{lim}}{\tau}t = v_0 + gt,$$

ossia che il moto, considerate queste assunzioni, è ben approssimato da un moto uniformemente accelerato.

Lavoro ed energia

Supponiamo che su un corpo di massa m agisca una sola forza costante $\vec{F}$ (e quindi che ci si stia riferendo ad un caso unidimensionale). Supponiamo ancora che in questa semplificazione il corpo si sia spostato di una lunghezza Δx dal punto A al punto B. In questo caso si chiamerà lavoro svolto dalla forza $\vec{F}$ sul corpo la quantità scalare:

$$L_{AB} = F\Delta x.$$

In generale, dato il vettore spostamento $\Delta\vec{r}$, se $\vec{F}$ non è l'unica forza che agisce sul corpo, si ricava che il lavoro è il seguente:

$$L_{AB} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}.$$

Osservazione. Si osservano le seguenti proprietà.

▶ Se la proiezione di $\vec{F}$ sul vettore spostamento ha direzione opposta a $\Delta\vec{r}$ (ossia se l'angolo compreso tra i due vettori è maggiore a $\frac{\pi}{2}$), il lavoro è negativo.
▶ Il lavoro è additivo: $L_{AC} = L_{AB} + L_{BC}$.
▶ Il lavoro da A a B, se $\vec{F}$ non è costante, può essere ricavato come una somma degli infinitesimi lavori compiuti dalla forza, ossia:

$$dL_{AB} = \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r},$$

da cui si ricava la fondamentale identità che coinvolge un integrale di linea:

$$L_{AB} = \int_{\gamma(A,B)} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r},$$

dove $\gamma(A, B)$ è la traiettoria percorsa dal corpo negli estremi A e B.