

Costruzione di altri spazi vettoriali

(i) dat: V, W spazi vettoriali, anche $V \times W$ è spazio vettoriale, con $\dim V \times W = \dim V + \dim W$. Siano $B = \{\underline{v}_i\}_{i \in I}$ base di V e $B' = \{\underline{w}_j\}_{j \in J}$, allora $B \times \{0\} \cup \{0\} \times B'$ è base di $V \times W$.

$$\begin{array}{l} \text{proiezioni:} \\ \text{immersioni:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} P_V : V \times W \rightarrow V, (\underline{v}, \underline{w}) \mapsto \underline{v} \quad (\text{proiezione su } V) \\ P_W : V \times W \rightarrow W, (\underline{v}, \underline{w}) \mapsto \underline{w} \quad (\text{proiezione su } W) \\ i_V : V \rightarrow V \times W, \underline{v} \mapsto (\underline{v}, \underline{0}) \quad (\text{immersione da } V) \\ i_W : W \rightarrow V \times W, \underline{w} \mapsto (\underline{0}, \underline{w}) \quad (\text{immersione da } W) \end{array} \right.$$

oss. $f : V \times W \rightarrow V \oplus W, (\underline{v}, \underline{w}) \mapsto \underline{v} + \underline{w}$ è un isomorfismo

(ii) dato un insieme X e un campo K si può costruire lo spazio

$$V_X = \left\{ \sum_{x \in X} \alpha_x X \mid \alpha_x \in K, \alpha_x \neq 0 \text{ un numero finito di volte} \right\}$$

con la somma e prodotto esterno termine a termine.

es. $K = F_2$ allora V_X è lo spazio che associa ogni elemento

a un sottinsieme finito di X . Questo spazio è isomorfo

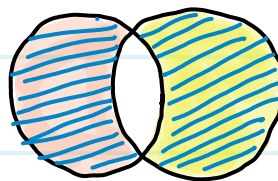
a $\mathcal{P}_{f.in}(X) = \{ I \subset X \mid I \text{ finito} \}$ con operazione

$I + J = I \Delta J = (I \cup J) \setminus (I \cap J)$ e prodotto t.c.

(i) $1 \cdot I = I$

$x_1 + \dots + x_j \leftrightarrow \{x_1, \dots, x_j\}$

(ii) $0 \cdot I = 0$



(iii) sia V sp. vett. su K , $U \subset V$ ssp. . Sia $\underline{v} \sim \underline{v}' \Leftrightarrow \underline{v} - \underline{v}' \in U$.
rel. d'equiv.

Allora V/\sim è l'insieme dei sottospazi affini, e si indica con V/U .

Prop. V/U è uno spazio vettoriale su K con:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} \quad [\underline{v}]_U + [\underline{w}]_U = [\underline{v+w}]_U \\ \text{(ii)} \quad \alpha [\underline{v}]_U = [\alpha \underline{v}]_U \end{array} \right\} [\underline{v}]_U = \underline{v} + U \in V/U$$

le cui operazioni: sono ben definite, dacché:

$$\underline{v} \sim \underline{v}', \quad \underline{w} \sim \underline{w}' \Rightarrow \underline{v+w} \sim \underline{v'+w}'$$

Teorema (i) $\pi: V \rightarrow V/U, \underline{v} \mapsto [\underline{v}]_U$ è lineare e surgettiva

(ii) $\text{Ker } \pi = U$

(iii) $\dim V/U = \dim V - \dim U$

(iv) $\pi|_{U'}$ con $V = U \oplus U'$ è un isomorfismo

(i) $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V, \pi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = [\underline{v}_1 + \underline{v}_2]_U = [\underline{v}_1]_U + [\underline{v}_2]_U =$
 $= \pi(\underline{v}_1) + \pi(\underline{v}_2)$ (linearità) e $\forall \alpha \in K, \pi(\alpha \underline{v}_1) =$
 $= [\alpha \underline{v}_1]_U = \alpha [\underline{v}_1]_U = \alpha \pi(\underline{v}_1)$ (omogeneità). Dunque π è
 un'applicazione lineare. Inoltre, $\forall A \in V/U \exists \underline{v} \in V \mid A = [\underline{v}]_U$,
 pertanto π è surgettiva.

(ii) $\pi(\underline{v}) = [\underline{v}]_U = [\underline{0}]_U \Leftrightarrow \underline{v} \in U$, dunque $\text{Ker } \pi = U$.

(iii) $\dim V = \underbrace{\dim \text{Ker } \pi}_{\dim U} + \underbrace{\dim \text{Im } \pi}_{\dim V/U} \Rightarrow \dim V/U = \dim V - \dim U$.

(iv) $\text{Ker } \pi|_{U'} = \overbrace{\text{Ker } \pi}^U \cap U' = \{\underline{0}\}$, dunque $\pi|_{U'}$ è iniettiva. Sia ora
 $\underline{v} \in V$. Poiché $V = U \oplus U'$, $\exists \underline{u} \in U, \underline{u}' \in U' \mid \underline{v} = \underline{u} + \underline{u}'$, ossia
 $\forall \underline{v} \in V \exists \underline{u}' \in U' \mid [\underline{v}]_U = [\underline{u}']_U = \pi(\underline{u}')$; quindi $\pi|_{U'}$ è surgettiva. Pertanto
 $\pi|_{U'}$ è un isomorfismo.

Teorema Sia $f: V \rightarrow W$ lineare, allora $\tilde{f}: V/\text{Ker } f \rightarrow \text{Im } f, \underline{v} + \text{Ker } f \mapsto f(\underline{v})$ è un isomorfismo, ossia $V/\text{Ker } f \cong \text{Im } f$.

Prop. $f: V \rightarrow W$ lineare, $U \subset V, Z \subset W$ ssp. t.c. $f(U) \subset Z$. Allora si ha una applicazione $\tilde{f}: V/U \rightarrow W/Z$ t.c. $\tilde{f}([\underline{v}]_U) = [f(\underline{v})]_W$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \pi_U & & \downarrow \pi_Z \\ V/U & \xrightarrow{\tilde{f}} & W/Z \end{array}$$

Oss. Sia $B = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \dots, \underline{v}_m\}$ base di V t.c. $B_U = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n\}$ sia base di U . Allora $T = \{[\underline{v}_{n+1}]_U, \dots, [\underline{v}_m]_U\}$ è una base di V/U .

In fatti $[a_{n+1}\underline{v}_{n+1} + \dots + a_m\underline{v}_m]_U = [\underline{0}]_U \Rightarrow a_{n+1}\underline{v}_{n+1} + \dots + a_m\underline{v}_m \in U \Rightarrow \exists a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} \mid a_{n+1}\underline{v}_{n+1} + \dots + a_m\underline{v}_m = a_1\underline{v}_1 + \dots + a_n\underline{v}_n$,
ossia, dacché B è base, $a_i = 0 \forall i$. Poiché T è lin. ind. e $|T| = |V/U|$, T è anche base.

Spazio duale di V

Sia V sp. vett. su \mathbb{K} $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ si chiama **DUALE** di V e si indica con V^* , i cui elementi sono detti **funzionali**.

es. $V = M_n(\mathbb{K}) \quad \text{tr} \in V^*$
 $V = \mathbb{K}[x] \quad \text{val}_{x_0} \in V^*$

Prop. se $\dim V = n \in \mathbb{N}$, allora $\dim V^* = n$.

Infatti: $\dim V^* = \dim \mathcal{L}(V, \mathbb{K}) = \dim V \cdot \dim \mathbb{K} = n$

□

Def. $V^{**} = (V^*)^*$, il biduale.

Oss. Si ha l'isomorfismo canonico $\phi: V \rightarrow V^{**}$, $\underline{v} \mapsto (\underline{f}: \underline{w}^* \mapsto \underline{w}^*(\underline{v}))$.

Infatti: $\phi(\underline{v}) = \underline{0} \implies \phi(\underline{v})(\underline{v}_i^*) = \underline{v}_i^*(\underline{v}) = \underline{0} \quad \forall \underline{v}_i \in B$ base. Dunque

$\underline{v} = \sum a_i \underline{v}_i$ è t.c. $a_i = 0 \quad \forall i$, ossia che $\underbrace{\underline{v}}_{\ker \phi = \{\underline{0}\}} = \underline{0}$. Poiché $\dim V = \dim V^{**}$, ϕ , in quanto iniettiva, è un isomorfismo.

Def. Sia $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Si identifica f^T come la TRASPOSTA di f ed essa si definisce come $f^T: W^* \rightarrow V^*$,
 $g \mapsto g \circ f$.

Prop. Sia $f \in \mathcal{L}(V, W)$. Siano \mathcal{B}_V e \mathcal{B}_W basi di V e W e siano \mathcal{B}_{V^*} e \mathcal{B}_{W^*} le basi di V^* e W^* costruite su \mathcal{B}_V e \mathcal{B}_W . Allora:

$$M_{\mathcal{B}_{V^*}}^{\mathcal{B}_{W^*}}(f^T) = M_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}(f)^T.$$

Siano $\mathcal{B}_V = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\}$ e $\mathcal{B}_W = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$. Sia $M_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}(f) = (a_{ij})_{\substack{i=1-m \\ j=1-n}}$.

$M_{\mathcal{B}_{V^*}}^{\mathcal{B}_{W^*}}(f^T)^j = [f^T(\underline{w}_j^*)]_{\mathcal{B}_{V^*}}$. Sia $f^T(\underline{w}_j^*) = \underline{w}_j^* \circ f = b_1 \underline{v}_1^* + \dots + b_m \underline{v}_m^*$. Allora $f^T(\underline{w}_j^*)(\underline{v}_i) = b_i$.

D'altra parte $(\underline{w}_j^* \circ f)(\underline{v}_i) = \underline{w}_j^*(f(\underline{v}_i)) = a_{ji}$.

Quindi $[f^T(\underline{w}_j^*)]_{\mathcal{B}_{V^*}} = \begin{pmatrix} a_{j1} \\ a_{j2} \\ \vdots \\ a_{jm} \end{pmatrix} = A_j^T$. Dunque $M_{\mathcal{B}_{V^*}}^{\mathcal{B}_{W^*}}(f^T) = M_W^V(f)^T$.