Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

27 e 28 marzo 2023

Proprietà e teoremi principali sul prodotto scalare

Nota. Nel corso del documento, per V si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita n e per φ un suo prodotto scalare.

Proposizione. (formula delle dimensioni del prodotto scalare) Sia $W \subseteq V$ un sottospazio di V. Allora vale la seguente identità:

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V + \dim(W \cap V^\perp).$$

Dimostrazione. Si consideri l'applicazione lineare $f : V \to W^*$ tale che $f(\underline{v})$ è un funzionale di W^* tale che $f(\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})\ \forall\, \underline{w} \in W$. Si osserva che $W^\perp = \operatorname{Ker} f$, da cui, per la formula delle dimensioni, $\dim V = \dim W^\perp + \operatorname{rg} f$. Inoltre, si osserva anche che $f = i^\top \circ a_\varphi$, dove $i : W \to V$ è tale che $i(\underline{w}) = \underline{w}$, infatti $f(\underline{v}) = a_\varphi(\underline{v}) \circ i$ è un funzionale di W^* tale che $f(\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$. Pertanto $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(i^\top \circ a_\varphi)$.

Si consideri ora l'applicazione $g = a_\varphi \circ i : W \to W^*$. Sia ora $\mathcal{B}_W$ una base di W e $\mathcal{B}_V$ una base di V. Allora le matrice associate di f e di g sono le seguenti:

(i) $M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_W^*}(f) = M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_W^*}(i^\top \circ a_\varphi) = \underbrace{M^{\mathcal{B}_V^*}_{\mathcal{B}_W^*}(i^\top)}_{A}\underbrace{M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V^*}(a_\varphi)}_{B} = AB,$

(ii) $M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V^*}(g) = M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V^*}(a_\varphi \circ i) = \underbrace{M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V^*}(a_\varphi)}_{B}\underbrace{M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V}(i)}_{A^\top} = BA^\top \overbrace{=}^{B^\top = B} (AB)^\top.$

Poiché $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^\top)$, si deduce che $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(g) \implies \operatorname{rg}(i^\top \circ a_\varphi) = \operatorname{rg}(a_\varphi \circ i) = \operatorname{rg}(a_\varphi|_W) = \dim W - \dim \operatorname{Ker} a_\varphi|_W = \dim W - \dim(W \cap$

$\underbrace{\operatorname{Ker} a_\varphi}_{V^\perp}) = \dim W - \dim(W \cap V^\perp)$. Si conclude allora, sostituendo quest'ultima identità nell'identità ricavata a inizio dimostrazione che $\dim V = \dim W^\top + \dim W - \dim(W \cap V^\perp)$, ossia la tesi. $\square$

Osservazione. Si possono fare alcune osservazioni sul radicale di un solo elemento $\underline{w}$ e su quello del suo sottospazio generato $W = \operatorname{Span}(\underline{w})$:

- $\underline{w}^\perp = W^\perp$,
- $\underline{w} \notin W^\perp \iff \operatorname{Rad}(\varphi|_W) = W \cap W^\perp \iff \underline{w}$ non è isotropo $= \{\underline{0}\} \iff V = W \oplus W^\perp$.

Definizione. Si definisce **base ortogonale** di V una base $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_n}$ tale per cui $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = 0 \impliedby i \neq j$, ossia per cui la matrice associata del prodotto scalare è diagonale.

Proposizione. Se $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$, un prodotto scalare è univocamente determinato dalla sua forma quadratica q.

Dimostrazione. Si nota infatti che $q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = 2\varphi(\underline{v}, \underline{w})$, e quindi, poiché 2 è invertibile per ipotesi, che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 2^{-1}(q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}))$. $\square$

Teorema. (di Lagrange) Ogni spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ tale per cui $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$ ammette una base ortogonale.

Dimostrazione. Sia dimostra il teorema per induzione su $n := \dim V$. Per $n \leq 1$, la dimostrazione è triviale. Sia allora il teorema vero per $i \leq n$. Se V ammette un vettore non isotropo $\underline{w}$, sia $W = \operatorname{Span}(\underline{w})$ e si consideri la decomposizione $V = W \oplus W^\perp$. Poiché $W^\perp$ ha dimensione $n-1$, per ipotesi induttiva ammette una base ortogonale. Inoltre, tale base è anche ortogonale a W, e quindi l'aggiunta di $\underline{w}$ a questa base ne fa una base ortogonale di V. Se invece V non ammette vettori non isotropi, ogni forma quadratica è nulla, e quindi il prodotto scalare è nullo per la proposizione precedente. $\square$

Teorema. (di Sylvester, caso complesso) Sia $\mathbb{K}$ un campo i cui elementi sono tutti quadrati di un altro elemento del campo (e.g. $\mathbb{C}$). Allora esiste una base ortogonale $\mathcal{B}$ tale per cui:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dimostrazione. Per il teorema di Lagrange, esiste una base ortogonale $\mathcal{B}'$ di V. Si riordini la base in modo tale che la forma quadratica valutata nei primi elementi sia sempre diversa da zero. Allora, poiché ogni elemento di $\mathbb{K}$ è per ipotesi quadrato di un altro elemento di $\mathbb{K}$, si sostituisca $\mathcal{B}'$ con una base $\mathcal{B}$ tale per cui, se $q(\underline{v_i}) = 0$, $\underline{v_i} \mapsto \underline{v_i}$, e altrimenti $\underline{v_i} \mapsto \frac{\underline{v_i}}{\sqrt{q(\underline{v_i})}}$. Allora $\mathcal{B}'$ è una base tale per cui la matrice associata del prodotto scalare in tale base è proprio come desiderata nella tesi, dove r è il numero di elementi tali per cui la forma quadratica valutata in essi sia diversa da zero. □

Osservazione. Si possono effettuare alcune considerazioni sul teorema di Sylvester complesso.

▶ Si può immediatamente concludere che il rango è un invariante completo per la congruenza in un campo in cui tutti gli elementi sono quadrati, ossia che $A \cong B \iff \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$: infatti ogni matrice simmetrica rappresenta una prodotto scalare, ed è pertanto congruente ad una matrice della forma desiderata nell'enunciato del teorema di Sylvester complesso. Poiché il rango è un invariante della congruenza, si ricava che r nella forma della matrice di Sylvester, rappresentando il rango, è anche il rango di ogni sua matrice congruente. In particolare, se due matrici simmetriche hanno stesso rango, allora sono congruenti alla stessa matrice di Sylvester, e quindi, essendo la congruenza una relazione di congruenza, sono congruenti a loro volta.
▶ Due matrici simmetriche con stesso rango, allora, non solo sono SD-equivalenti, ma sono anche congruenti. ▶ Ogni base ortogonale deve quindi avere lo stesso numero di elementi nulli.

Teorema. (di Sylvester, caso reale) Sia $\mathbb{K}$ un campo ordinato i cui elementi positivi sono tutti quadrati (e.g. $\mathbb{R}$). Allora esiste una base ortogonale $\mathcal{B}$ tale per cui:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{i_+} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_{i_-} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \cdot I_{i_0} \end{array}\right).$$

Dimostrazione. Per il teorema di Lagrange, esiste una base ortogonale $\mathcal{B}'$ di V. Si riordini la base in modo tale che la forma quadratica valutata nei primi elementi sia strettamente positiva, che nei secondi elementi sia strettamente negativa e che negli ultimi sia nulla. Si sostituisca $\mathcal{B}'$ con una base $\mathcal{B}$ tale per cui, se $q(\underline{v_i}) > 0$, allora $\underline{v_i} \mapsto \frac{\underline{v_i}}{\sqrt{q(\underline{v_i})}}$; se $q(\underline{v_i}) < 0$, allora $\underline{v_i} \mapsto \frac{\underline{v_i}}{\sqrt{-q(\underline{v_i})}}$;

altrimenti $\underline{v_i} \mapsto \underline{v_i}$. Si è allora trovata una base la cui matrice associata del prodotto scalare è come desiderata nella tesi, dove i_+ è il numero di elementi della base la cui forma quadratica è positiva, i_- il numero di elementi cui tale forma sia negativa e i_0 il numeri degli elementi cui tale forma sia nulla. □

Definizione. Si definisce **segnatura** di un prodotto scalare la terna (i_+, i_-, i_0), come vista nella dimostrazione del teorema di Sylvester reale.

Osservazione. Riguardo alla segnatura e al caso reale del teorema di Sylvester possono essere fatte alcune considerazioni.

► La segnatura è un invariante completo per la congruenza nel caso reale. Se infatti due matrici hanno la stessa segnatura, sono entrambe congruenti alla matrice come vista nella dimostrazione della forma reale del teorema di Sylvester, e quindi, essendo la congruenza una relazione di equivalenza, sono congruenti tra loro.