Note del corso di Analisi Matematica 1

Gabriel Antonio Videtta

4 aprile 2023

Questo avviso sta ad indicare che questo documento è ancora una bozza e non è da intendersi né completo, né revisionato.

Teoria sulle derivate

Definizione. (derivata) Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si definisce allora **derivata** di f in $\overline{x} \in X$ punto di accumulazione, se esiste, il seguente limite:

$$Df(\overline{x}) = f'(\overline{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x}+h) - f(\overline{x})}{h} = \lim_{x \to \overline{x}} \frac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}}.$$

Qualora tale limite non esista, si dirà che non esiste la derivata di f in $\overline{x}$. Si definisce anche $f' : D \subseteq X \to \overline{\mathbb{R}}$ come la funzione derivata, la quale associa ogni punto $\overline{x}$ in cui la derivata di f esiste al valore del limite computato in $\overline{x}$.

Definizione. $\overline{x} \in X$ si dice **derivabile** se e solo se esiste la derivata di f in $\overline{x}$ e $f'(\overline{x})$ è finito.

Osservazione.

- L'insieme D può essere vuoto.
- Si definisce $f^{(n)}(\overline{x})$ come la derivata n-esima di f in $\overline{x}$.
- Si definisce per convenzione $f^{(0)}(x) = f(x)$.
- L'operazione di derivata è un operatore lineare.

Definizione. (derivata destra e sinistra) Dato $\overline{x}$ punto di accumulazione destro di X, si definisce allora **derivata destra** di f in $\overline{x} \in X$, se esiste, il seguente limite:

$$D_+ f(\overline{x}) = f'_+(\overline{x}) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(\overline{x}+h) - f(\overline{x})}{h} = \lim_{x \to \overline{x}^+} \frac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}}.$$

Qualora tale limite non esista, si dirà che non esiste la derivata destra di f in $\overline{x}$. Analogamente, per un punto di accumulazione sinistro $\overline{x} \in X$, si definisce la **derivata sinistra** di f in $\overline{x} \in X$, se esiste, il seguente limite:

$$D_- f(\overline{x}) = f'_-(\overline{x}) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(\overline{x}+h) - f(\overline{x})}{h} = \lim_{x \to \overline{x}^-} \frac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}}.$$

Osservazione.
▶ Se esistono sia la derivata sinistra che destra di f in $\overline{x}$ e coincidono, allora la derivata di f in $\overline{x}$ esiste e coincide con il valore di entrambe le due derivate.
▶ Vale anche il viceversa, se $\overline{x}$ è un punto di accumulazione sia destro che sinistro: se esiste la derivata di f in $\overline{x}$, allora sia la derivata sinistra che destra esistono e coincidono con la derivata.

Definizione. Si dice che $f : X \to \mathbb{R}$ è derivabile se è derivabile $\forall\, x \in X$.

Definizione. Si dice che $f \in \mathcal{C}^1$ se è derivabile e la sua funzione derivata è continua. In generale, si dice che $f \in \mathcal{C}^n$ se è derivabile n volte e ogni sua derivata, fino alla n-esima, è continua. Si pone $f \in \mathcal{C}^\infty$ se f è derivabile per un numero arbitrario di volte e ogni sua derivata è continua.

Proposizione. Sia $f : X \to \mathbb{R}$ e sia $\overline{x} \in X$ un punto di accumulazione di X. Allora:

(i) f derivabile in $\overline{x} \implies f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})h + o(h)$.

(ii) Se esiste a tale che $f(\overline{x}+h) = f(\overline{x}) + ah + o(h)$, allora f è derivabile in $\overline{x}$ e $f'(\overline{x}) = a$.

Dimostrazione. Se f è derivabile in $\overline{x}$, allora $\lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x}+h)-f(\overline{x})-f'(\overline{x})h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x}+h)-f(\overline{x})}{h} - f'(\overline{x}) = f'(\overline{x}) - f'(\overline{x}) = 0$, da cui la prima tesi.

Inoltre, se esiste a come nelle ipotesi, $\lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x}+h)-f(\overline{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah+o(h)}{h} = a + \lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = a + 0 = a$, quindi f è derivabile in $\overline{x}$ e $f'(\overline{x}) = a$. □

Corollario. Se f è derivabile in $\overline{x}$, allora f è anche continua in $\overline{x}$.

Dimostrazione. Infatti, poiché $f(x) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}) + o(x - \overline{x})$, $\lim_{x\to\overline{x}} f(x) = \lim_{x\to\overline{x}} f(\overline{x}) + \lim_{x\to\overline{x}} f'(\overline{x})(x-\overline{x}) + \lim_{x\to\overline{x}} o(x-\overline{x}) = \lim_{x\to\overline{x}} f(\overline{x}) = f(\overline{x})$, e quindi f è continua in $\overline{x}$. □

Proposizione. Siano $f_1,\, f_2 : X \to \mathbb{R}$ entrambe derivabili in $\overline{x}$. Allora:

(i) $(f_1+f_2)'(\overline{x}) = f_1'(\overline{x}) + f_2'(\overline{x})$,

(ii) $(f_1 f_2)'(\overline{x}) = f_1(\overline{x})f_2'(\overline{x}) + f_1'(\overline{x})f_2(\overline{x})$.

Dimostrazione. Poiché f_1 ed f_2 sono derivabili in $\overline{x}$, vale che:

$$f_1(\overline{x}+h) = f_1(\overline{x}) + f_1'(\overline{x})h + o(h), \qquad f_2(\overline{x}+h) = f_2(\overline{x}) + f_2'(\overline{x})h + o(h).$$

(i) $(f_1+f_2)(\overline{x}+h) = (f_1+f_2)(\overline{x}) + (f_1'+f_2')(\overline{x})h + o(h)$. Quindi, per la proposizione precedente, $(f_1+f_2)'(\overline{x}) = (f_1'+f_2')(\overline{x}) = f_1'(\overline{x}) + f_2'(\overline{x})$.

(ii) $(f_1f_2)(\overline{x}+h) = (f_1f_2)(\overline{x}) + (f_1(\overline{x})f_2'(\overline{x}) + f_1'(\overline{x})f_2(\overline{x}))h + \underbrace{(f_1(\overline{x})+f_2(\overline{x}))o(h) + (f_1'f_2')(\overline{x})h^2 + (f_1'(\overline{x})+f_2'(\overline{x}))h\cdot o(h) + o^2(h))}_{=o(h)} = (f_1f_2)(\overline{x}) + (f_1(\overline{x})f_2'(\overline{x}) + f_1'(\overline{x})f_2(\overline{x}))h + o(h)$. Quindi, per la proposizione precedente, $(f_1f_2)'(\overline{x}) = f_1(\overline{x})f_2'(\overline{x}) + f_1'(\overline{x})f_2(\overline{x})$.

□

Proposizione. Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to \mathbb{R}$, con f derivabile in $\overline{x}$ e g derivabile in $\overline{y} := f(\overline{x})$. Allora $g\circ f$ è derivabile in $\overline{x}$ e $(g\circ f)'(\overline{x}) = f'(\overline{x})g'(\overline{y})$.

Dimostrazione. Poiché $f'(\overline{x})$ è finito, $f(\overline{x}+h) = \overline{y} + f'(\overline{x})h + o(h)$. Analogamente, $g(\overline{y}+h) = g(\overline{y}) + g'(\overline{y})h + o(h)$. Allora $g(f(\overline{x}+h)) = g(\overline{y} + (f'(\overline{x})h + o(h))) = g(\overline{y}) + g'(\overline{y})(f'(\overline{x})h + o(h)) + o(f'(\overline{x})h + o(h)) = g(\overline{y}) + g'(\overline{y})f'(\overline{x})h + o(h) + o(f'(\overline{x})h + o(h))$.

Si osserva che $\lim_{h\to 0} \frac{o(f'(\overline{x})h+o(h))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{o(f'(\overline{x})h+o(h))}{f'(\overline{x})h+o(h)} \frac{f'(\overline{x})h+o(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{o(f'(\overline{x})h+o(h))}{f'(\overline{x})h+o(h)} \lim_{h\to 0} \frac{f'(\overline{x})h+o(h)}{h} = 0 \cdot f'(\overline{x}) = 0$, e quindi che $o(f'(\overline{x})h + o(h)) = o(h)$. Allora $g(f(\overline{x}+h)) = g(\overline{y}) + g'(\overline{y})f'(\overline{x})h + o(h)$, da cui si conclude che $(g\circ f)'(\overline{x}) = g'(\overline{y})f'(\overline{x})$. □

Proposizione. Sia $f : X \to Y$ con inversa $g : Y \to X$. Sia f derivabile in $\overline{x}$ con $f'(\overline{x}) \neq 0$. Sia g continua in $\overline{y} = f(\overline{x})$. Allora:

(i) $\overline{y}$ è un punto di accumulazione di Y,

(ii) g è derivabile in $\overline{y}$,

(iii) $g'(\overline{y}) = \frac{1}{f'(\overline{x})}$.

Dimostrazione.

(i) Poichè f è derivabile in $\overline{x}$, f è continua in $\overline{x}$. Quindi per ogni intorno I di $\overline{y}$, esiste un intorno J di $\overline{x}$ tale per cui $f(I \cap X \setminus \{\overline{x}\}) \subseteq J$. Inoltre, $I \cap X \setminus \{\overline{x}\}$ non è mai vuoto, dacché, essendo f derivabile in $\overline{x}$, $\overline{x}$ è un punto di accumulazione di X. Quindi J contiene in particolare un immagine di f in esso, e quindi un punto di Y; inoltre, tale punto è diverso da $\overline{y}$ dal momento che f è iniettiva, essendo bigettiva. Quindi $\overline{y}$ è un punto di accumulazione.

(ii) e (iii) Poiché f è derivabile in $g(\overline{y})$, $\overline{y} + h = f(g(\overline{y} + h)) = f(g(\overline{y}) + (\underbrace{g(\overline{y} + h) - g(\overline{y})}_{k})) = \overline{y} + f'(\overline{x})k + o(k)$, ossia vale che:

$$h = f'(\overline{x})k + o(k).$$

Dal momento che g è continua in $\overline{y}$, $k \xrightarrow[h \to 0]{} 0$, e quindi $o(k) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$. Quindi, per $h \to 0$, $k \sim \frac{h}{f'(\overline{x})}$. Si conclude dunque che $\lim_{h \to 0} \frac{g(\overline{y}+h) - g(\overline{y})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k}{h} = \frac{1}{f'(\overline{x})}$.

□

Esempio. La continuità è necessaria nelle scorse ipotesi. Si può costruire infatti una funzione del tipo:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -(x+2) & \text{se } -2 < x \leq -1. \end{cases}$$

dove $f'(0) = 1$, f è invertibile, ma la derivata di g in 0 non esiste ($D_+g(0) = 1$, ma $D_-g(0) = +\infty$).

Teorema. (di Fermat) Sia I intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$, $\overline{x}$ interno a I punto di massimo o minimo locale con f derivabile in $\overline{x}$, allora $f'(\overline{x}) = 0$.

Esempio. Dimostrare che la derivata sinistra è negativa, e che quella destra è positiva nei casi che hai capito.

Teorema. (di Rolle) Sia $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ tale che f sia continua su I, che $f(a) = f(b)$ e che f sia derivabile in $[a, b]$. Allora $\exists\, \overline{x} \in (a, b)$ tale che $f'(\overline{x}) = 0$.

Dimostrazione. Per il teorema di Weierstrass f ammette un punto di massimo M e uno di minimo m in I. Se $f(a) = M$ e $f(b) = m$ o viceversa, la funzione f è costante in I, e quindi per ogni punto in (a, b) la derivata è nulla, dacché f è sempre derivabile. Altrimenti, sicuramente uno tra il punto di massimo e quello di minimo appartiene a (a, b). Senza perdita di generalità, si assuma che $\exists\, x_M \in (a, b)$ tale che $f(x_M) = M$: per il teorema di Fermat $f'(x_M) = 0$. Analogamente per il caso in cui $\exists\, x_m \in (a, b)$ tale che $f(x_m) = m$, da cui la tesi. $\square$

Teorema. (di Cauchy) Sia $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e siano $f,\ g : I \to \mathbb{R}$ continue su I e derivabili in (a, b), con g' non nulla in (a, b) e $g(a) \neq g(b)$. Allora $\exists\, \overline{x} \in (a, b)$ tale che $\frac{f'(\overline{x})}{g'(\overline{x})} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Dimostrazione. Si consideri la funzione $h : I \to \mathbb{R}$ tale che $h(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a)) + f(a)\right)$. Si osserva che h, essendo una somma di funzioni continue su I e derivabili in (a, b), è anch'essa continua su I e derivabile in (a, b). Inoltre $h(a) = h(b) = 0$. Quindi, per il teorema di Rolle, $\exists\, \overline{x} \in (a, b) \mid h'(\overline{x}) = 0 \implies \frac{f'(\overline{x})}{g'(\overline{x})} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, da cui la tesi. $\square$

Teorema. (di Lagrange) Sia $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ tale che f sia continua su I e che f sia derivabile in (a, b). Allora $\exists\, \overline{x} \in (a, b)$ tale che $f'(\overline{x}) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ossia la cui retta tangente è parallela alla secante che passa per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Dimostrazione. Si consideri $g(x) = x$, g è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b), con derivata sempre non nulla in tale intervallo. Allora, per il teorema di Cauchy, $\exists\, \overline{x} \in (a, b) \mid f'(\overline{x}) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, da cui la tesi. $\square$

Proposizione. Sia $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ tale che f sia continua su I e che f sia derivabile in (a, b), con derivata non negativa. Allora f è crescente in $[a, b]$. Analogamente, se la derivata è non positiva, f è decrescente.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità si dimostra il caso in cui la derivata di f in (a, b) è non negativa (altrimenti è sufficiente considerare $g = -f$). Si considerino $c < d \in I$. Allora, per il teorema di Lagrange, $\exists\, \overline{x} \in (c, d) \mid f'(c) = \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \implies f(d) - f(c) = \underbrace{f'(c)(d - c)}_{\geq 0} \implies f(d) \geq f(c)$, ossia che f è crescente in I. $\square$

Osservazione.

- ▶ L'interpretazione geometrica del teorema di Cauchy, rispetto a quella di

Lagrange, è leggermente più complicata. Si consideri la curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tale che $\gamma(t) = (g(t), f(t))$. Si osserva che il coefficiente della retta tangente in $\overline{x}$ per γ è dato da $\lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{x}+h)-f(\overline{x})}{g(\overline{x}+h)-g(\overline{x})}$, che, sotto le ipotesi del teorema di Cauchy, può essere riscritto come $\frac{f'(\overline{x})}{g'(\overline{x})}$. Allora, il teorema di Cauchy asserisce che esiste un punto della curva γ tale per cui la retta tangente alla curva in quel punto è parallela alla secante passante per $(g(a), f(a))$ e $(g(b), f(b))$.

Esercizio 1. Dare un esempio di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e discontinua $\forall\, x \in \mathbb{Z}$.

Soluzione. Si consideri $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

Esercizio 2. Si descriva un insieme X tale che i suoi punti di accumulazione sono $\{\pm 1\}$.

Soluzione. Si consideri $X = \{1 + \frac{1}{n}\} \cup \{-1 + \frac{1}{n}\}$.

Esercizio 3. Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ continua in $\overline{x}$ e sia $a < f(\overline{x})$. Allora esiste J intorno di $\overline{x}$ tale che $a < f(x)\ \forall\, x \in J$.

Esercizio 4. Sia $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e sia $\overline{x}$ punto di accumulazione di X, f_1, $f_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Allora:

(i) Se $f_1 \xrightarrow[x\to\overline{x}]{} +\infty$ e f_2 è limitata inferiormente in un intorno J di $\overline{x}$, allora $f_1(x) + f_2(x) \xrightarrow[x\to\overline{x}]{} +\infty$.

(ii) Se $f_1 \xrightarrow[x\to\overline{x}]{} 0$ e f_2 è limitata in un intorno di $\overline{x}$, allora $f_1 f_2(x) \xrightarrow[x\to\overline{x}]{} 0$.

(iii) Se $f_1 \xrightarrow[x\to\overline{x}]{} +\infty$ è limitata inferiormente da una costante positiva m in un intorno J di $\overline{x}$, allora $f_1 f_2 \xrightarrow[x\to\overline{x}]{} +\infty$.

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Mostrare che f è continua, che $f'(0) = 1$ e che f' non è continua in zero.