# Classi laterali

Dato $H < G$, si definisce classe laterale un insieme:

$$gH = \{gh \mid h \in H\},\ g \in G.$$

es. Dato $H = \{e, (1,2)\} < S_4$, l'insieme $(3,4)H = \{(3,4), (1,2)(3,4)\}$ è una sua classe laterale.

Prop. le classi laterali di $H < G$ partizionano $G$ (i.e. $\bigcup_{g \in G} gH = G \wedge g_1H \cap g_2H \neq \emptyset \iff g_1H = g_2H$).

- $g \in gH$ $(g \cdot e = g)$
- $g_1 \in g_2H \Longrightarrow g_1 = g_2h,\ h \in H.$
  - $g_2h' = g_2hh^{-1}h' = g_1\underbrace{h^{-1}h'}_{\in H} \in g_1H$ $(g_2H \subseteq g_1H)$.
  - $g_1h' = g_2\underbrace{hh'}_{\in H} \in g_2H$ $(g_2H \subseteq g_1H)$.

Quindi: $g_1H \cap g_2H \neq \emptyset \Rightarrow \exists g \in G \mid g \in g_1H \wedge g \in g_2H$. Poiché $g \in gH$, $g_1H = gH$ e $g_2H = gH$;

quindi $g_1 H = g_2 H$. Viceversa $g_1 H = g_2 H \Rightarrow g_1 H \cap g_2 H =$
$= g_2 H \neq \emptyset$ (infatti H non può essere vuoto, dal momento che vi appartiene e). $\boxtimes$

**Prop.** ogni classe laterale ha la stessa cardinalità se H è finito (i.e. $|gH| = |H| \ \forall g \in G$).

Dal momento che si possono effettuare al più $|H|$ operazioni, $|gH| \leq |H|$.
Per assurdo si ponga allora che $\exists h_1 \neq h_2 \in H \mid$
$g h_1 = g h_2$. $g h_1 = g h_2 \iff h_1 = h_2$ ($\lightning$).
Si conclude che $|gH| = |H|$. $\boxtimes$

**Teorema (di Lagrange)** $H < G \Longrightarrow \text{card}\, H \mid \text{card}\, G$ (per G finito).

Poiché le classi laterali di H partizionano G, $\text{card}\, G = \sum_{i \in I} |g_i H|$ (dove $I$ è l'insieme di indici delle classi laterali distinte). Dal momento che $|g_i H| = |H| \ \forall i$, $\text{card}\, G = N \,\text{card}\, H$, con N numero di classi laterali gH distinte.

Dunque, card $H \mid$ card $G$. $\boxtimes$

# Gruppi normali e coniugio

**Def.** Si definisce coniugio di $h \in G$ rispetto a $g \in G$ l'operazione $ghg^{-1}$.

**Oss.** Per un gruppo abeliano, il coniugio è equivalente all'identità ($ghg^{-1} = gg^{-1}h = h$).

**Def.** E' possibile evidenziare la natura funzionale del coniugio definendo la funzione

$$C_g : G \to G, \quad h \mapsto ghg^{-1}.$$

**Oss.** $C_g$ è un automorfismo:

- $C_g(xy) = gxyg^{-1} = gxg^{-1} \cdot gyg^{-1} = C_g(x) \cdot C_g(y)$
- $C_g$ è iniettiva: $C_g(h) = e \iff ghg^{-1} = e \iff gh = g \iff h = e \iff \operatorname{Ker} C_g = \{e\}$.
- $C_g$ è suriettiva: $x = gg^{-1}xgg^{-1} = g(g^{-1}xg)g^{-1}$.

**Def.** Un sottogruppo $H<G$ si dice NORMALE se $ghg^{-1} \in H \ \forall g \in G, h \in H$. In tal caso si scrive $H \triangleleft G$.

**Oss.** $gHg^{-1} \subset H \iff gHg^{-1} = H$. Infatti: $\forall h \in H$, $h = gg^{-1}hgg^{-1} = g\underbrace{(g^{-1}hg)}_{\in H}g^{-1} \in$ $\in gHg^{-1}$.

**Prop.** Data $f : G \to G_2$ omomorfismo, $\ker f \triangleleft G$.

Infatti: $\forall g \in G, k \in \ker f$, $f(gkg^{-1}) =$

$$= f(g)\underbrace{f(k)}_{=e_{G_2}}f(g^{-1}) = f(g)f(g^{-1}) = e_{G_2} \iff$$

$$\iff gkg^{-1} \in \ker f \iff \ker f \triangleleft G. \quad \boxtimes$$

# Gruppi quozienti

**Def.** Dato $H \triangleleft G$, si definisce GRUPPO QUOZIENTE il gruppo formato dall'insieme delle classi laterali di $H$ su $G$ con l'operazione $\cdot : g_1H, g_2H \mapsto (g_1g_2H)$. Esso viene indicato con $G/H$.

Che $H$ sia un sottogruppo normale è necessario affinché l'operazione $\cdot$ sia ben definita.
Siano dunque $g_1H$ e $g_2H$ due classi laterali, ogni loro variante si scrive come $g_1hH$ e $g_2\bar{h}H$, $h, \bar{h} \in H$. Allora $g_1H \cdot g_2H = g_1hH \cdot g_2\bar{h}H$ affinché $\cdot$ sia ben definita: $(g_1g_2)H =$
$= (g_1hg_2\bar{h})H = (g_1hg_2)H = (g_1g_2g_2^{-1}hg_2)H$.
Quindi $g_2^{-1}hg_2 \in H \ \forall h \in H, g_2 \in G \iff$
$\iff H \triangleleft G$.

**es.** $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ è il gruppo quoziente definito col sottogruppo $2\mathbb{Z}$ (i.e. i numeri pari) su $\mathbb{Z}$. Esso è ben definito dal momento che $2\mathbb{Z}$ è normale (poiché abeliano). In particolare $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{2\mathbb{Z}, 1+2\mathbb{Z}\}$.

**Oss.** Se $G$ e $H$ sono finiti, esistono esattamente $|G|/|H|$ elementi distinti di $G/H$.

## Il primo teorema di omomorfismo

**Teorema** $G/\ker f \cong \mathrm{Imm}\, f$

Dal momento che $\ker f \trianglelefteq G$, $G/\ker f$ è ben definito. Si definisca $f' : G/\ker f \to \mathrm{Imm}\, f$, $g \ker f \mapsto f(g)$.

- **$f'$ è un omomorfismo:** $f'(g_1 \ker f \cdot g_2 \ker f) =$
$= f'((g_1 \cdot g_2) \ker f) = f(g_1 \cdot g_2) = f(g_1) \cdot f(g_2) =$
$= f'(g_1 \ker f) \cdot f'(g_2 \ker f)$.
- **$f'$ è surgettiva:** $\forall h \in \mathrm{Imm}\, f \; \exists g \in G \mid f(g) = h \implies f'(g \ker f) = f(g) = h$.

- **$f'$ è iniettiva:** è sufficiente mostrare che $\ker f' = \{\ker f\}$. $f'(g \ker f) = e_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(g) = e_2 \Rightarrow g \in \ker f \Rightarrow$
$\Rightarrow g \ker f \cap \ker f \neq \emptyset \rightarrow g \ker f = \ker f \Rightarrow$
$\rightarrow \ker f' = \{\ker f\}$.

Quindi $f'$ è un omomorfismo bigettivo, ossia un isomorfismo. Pertanto $G/\ker f \cong \operatorname{Imm} f$. $\boxtimes$

**es.** $S_n / \underbrace{\ker \operatorname{sgn}}_{A_n,\ \text{le permutazioni pari}} \cong \operatorname{Imm} \operatorname{sgn} \cong C_2 = \{-1, 1\}$.

Quindi $|S_n / A_n| = |C_2| = 2$. Poiché $|S_n/A_n| =$
$= |S_n| / |A_n|$, $|A_n| = |S_n|/2 = \frac{n!}{2}$.

**Corollario** $f$ omomorfismo iniettivo $|\ f: G \rightarrow H \rightarrow$
$\rightarrow G \cong \operatorname{Imm} f$.

Poiché $f$ è iniettiva, $\ker f = \{e\}$. Dal momento che $G/\ker f \cong \operatorname{Imm} f$ e $G/\ker f =$
$= G/\{e\} = G$, si desume che $G \cong \operatorname{Imm} f$. $\boxtimes$

**Corollario** $f$ omomorfismo surgettivo $\mid f: G \to H \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad G/\mathrm{Ker}\, f \cong H$.

Poiché $f$ è surgettiva, $\mathrm{Imm}\, f = H$. Allora
$G/\mathrm{Ker}\, f \cong \mathrm{Imm}\, f \cong H$. ⊠

**Oss.** E' sempre possibile trovare un omomorfismo il cui nucleo sia un certo sottogruppo normale $H \trianglelefteq G$. Basta definire $f: G \to G/H$, $g \mapsto gH$. Affinché $f(g) = H$, $gH = H \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad g \in H \Leftrightarrow \mathrm{Ker} = H$.

Poiché $f$ è un omomorfismo $\Rightarrow \mathrm{Ker}\, f \trianglelefteq G$, vale allora che $H \trianglelefteq G \Leftrightarrow \exists f$ omom. $\mid \mathrm{Ker}\, f = H$.