Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

28 aprile 2023

Indipendenza e applicazioni affini

Questo avviso sta ad indicare che questo documento è ancora una bozza e non è da intendersi né completo, né revisionato.

Nota. Qualora non specificato diversamente, si intenderà per E uno spazio affine sullo spazio vettoriale V e per E' uno spazio affine sullo spazio vettoriale V', dove sia V che V' sono costruiti sul campo $\mathbb{K}$.

Fissato un origine O dello spazio affine, si possono sempre considerare due bigezioni:

- La bigezione $i_O : E \to V$ tale che $i(P) = P - O \in V$,
- La bigezione $j_O : V \to E$ tale che $j(\underline{v}) = O + \underline{v} \in E$.

Si osserva inoltre che i_O e j_O sono l'una la funzione inversa dell'altra.
Dato uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ di dimensione n, si può considerare V stesso come uno spazio affine, denotato con le usuali operazioni:

(a) $\underline{v}+\underline{w}$, dove $\underline{v} \in V$ è inteso come *punto* di V e $\underline{w} \in W$ come il vettore che viene applicato su $\underline{w}$, coincide con la somma tra $\underline{v}$ e $\underline{w}$ (e analogamente $\underline{w} - \underline{v}$ è esattamente $\underline{w} - \underline{v}$).

(b) Le bigezioni considerate inizialmente sono in particolare due mappe tali che $i_{\underline{v_0}}(\underline{v}) = \underline{v} - \underline{v_0}$ e che $j_{\underline{v_0}}(\underline{v}) = \underline{v_0} + \underline{v}$.

Definizione (spazio affine standard)**.** Si denota con $\mathcal{A}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$ lo **spazio affine standard** costruito sullo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$. Analogamente si indica con A_V lo spazio affine costruito su uno spazio vettoriale V.

Osservazione.

▶ Una combinazione affine di A_V è in particolare una combinazione lineare di V. Infatti, se $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{v_i}$ con $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, allora, fissato $\underline{v_0} \in V$, $\underline{v} = \underline{v_0} + \sum_{i=1}^n \lambda_i(\underline{v_i} - \underline{v_0}) = \underline{v_0} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{v_i} - \underline{v_0} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underline{v_i}$.

▶ Come vi è una bigezione data dal passaggio alle coordinate da V a $\mathbb{K}^n$, scelta una base $\mathcal{B}$ di V e un punto O di E, vi è anche una bigezione $\varphi_{O,\mathcal{B}}$ da E a $\mathcal{A}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$ data dalla seguente costruzione:

$$\varphi_{O,\mathcal{B}}(P) = [P - O]_{\mathcal{B}}.$$

Proposizione. Sia $D \subseteq E$. Allora D è un sottospazio affine di $E \iff$ fissato $P_0 \in D$, l'insieme $D_0 = \{P - P_0 \mid P \in D\} \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale di V.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

($\Longrightarrow$) Siano $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_k} \in D_0$. Allora, per definizione, esistono P_1, ..., $P_k \in D$ tali che $\underline{v_i} = P_i - P_0 \;\forall\, 1 \leq i \leq k$. Siano λ_1, ..., $\lambda_k \in \mathbb{K}$. Sia inoltre $P = P_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{v_i} \in E$. Sia infine $O \in D$. Allora $P = O + (P_0 - O) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{v_i} = O + (P_0 - O) + \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - O + O - P_0) = O + (P_0 - O) + \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - O) - \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_0 - O) = O + (1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i)(P_0 - O) + \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - O)$. In particolare P è una combinazione affine di P_1, ..., $P_k \in D$, e quindi, per ipotesi, appartiene a D. Allora $P - P_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{v_i} \in D_0$. Poiché allora D_0 è chiuso per combinazioni lineari, D_0 è un sottospazio vettoriale di V.

($\Longleftarrow$) Sia $P = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$ con $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, con P_1, ..., $P_k \in D$ e λ_1, ..., $\lambda_k \in \mathbb{K}$. Allora $P - P_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - P_0) \in D_0$ per ipotesi, essendo combinazione lineare di elementi di D_0. Pertanto, poiché esiste un solo punto P' tale che $P' = P_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - P_0)$, affinché $\sum_{i=1}^k \lambda_i (P_i - P_0)$ appartenga a D_0, deve valere anche che $P \in D$. Si conclude quindi che D è un sottospazio affine, essendo chiuso per combinazioni affini. $\square$

Osservazione. Sia D un sottospazio affine di E.

▶ Vale la seguente identità $D_0 = \{P - Q \mid P, Q \in D\}$. Sia infatti $A = \{P - Q \mid P, Q \in D\}$. Chiaramente $D_0 \subseteq A$. Inoltre, se $P - Q \in A$, $P - Q = (P - P_0) - (Q - P_0)$. Pertanto, essendo $P - Q$ combinazione lineari di elementi di D_0, ed essendo D_0 spazio vettoriale per la proposizione precedente, $P - Q \in D_0 \implies A \subseteq D_0$, da cui si conclude che $D_0 = A$.

▶ Pertanto D_0 è unico, a prescindere dalla scelta di $P_0 \in D$.

▶ Vale che $D = P_0 + D_0$, ossia D è il traslato di D mediante il punto P_0.

Definizione (direzione di un sottospazio affine)**.** Si definisce $D_0 = \mathrm{Giac}(D) = \{P - Q \mid P, Q \in D\} \subseteq V$ come la **direzione** (o *giacitura*) del sottospazio affine D.

Definizione (dimensione un sottospazio affine)**.** Dato D sottospazio affine di E, si dice dimensione di D, indicata con $\dim D$, la dimensione della sua direzione D_0, ossia $\dim D_0$. In particolare $\dim E = \dim V$.

Definizione (sottospazi affini paralleli)**.** Due sottospazi affini si dicono **paralleli** se condividono la stessa direzione.

Osservazione.
▶ I sottospazi affini di dimensione zero sono tutti i punti di E.
▶ I sottospazi affini di dimensione uno sono le *rette affini*, mentre quelli di dimensione due sono i *piani affini*.
▶ Si dice *iperpiano affine* un sottospazio affine di codimensione 1, ossia di dimensione $n - 1$.

Definizione (punti affinemente indipendenti)**.** Un insieme di punti P_1, ..., P_k di E si dice **affinemente indipendente** se ogni combinazione affine di tali punti è unica. Analogamente un sottoinsieme $S \subseteq E$ si dice affinemente indipendente se ogni suo sottoinsieme finito lo è.

Proposizione. Dati i punti P_1, ..., $P_k \in E$, sono equivalenti le seguenti affermazioni.

(i) P_1, ..., P_k sono affinemente indipendenti,

(ii) $\forall\, i \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq i \leq k$, $P_i \notin \mathrm{Aff}(P_1, \ldots, P_k)$, con P_i escluso,

(iii) $\forall\, i \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq i \leq k$ l'insieme di vettori $\{P_j - P_i \mid 1 \leq j \leq k, j \neq i\}$ è linearmente indipendente,

(iv) $\exists\, i \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq i \leq k$ per il quale l'insieme di vettori $\{P_j - P_i \mid 1 \leq j \leq k, j \neq i\}$ è linearmente indipendente.

Dimostrazione. Siano P_1, ..., P_k affinemente indipendenti. Sia $i \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq i \leq k$. Allora chiaramente (i) $\iff$ (ii), dacché se P_i appartenesse a $\mathrm{Aff}(P_1, \ldots, P_k)$, con P_i escluso, si violerebbe l'unicità della combinazione affine di P_i, e analogamente se esistessero due combinazioni affini in diversi scalari dello stesso punto si potrebbe un punto P_j con $1 \leq j \leq k$ come combinazione affine degli altri punti.

Siano allora λ_1, ..., $\lambda_k \in \mathbb{K}$, con λ_i escluso, tali che:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j (P_j - P_i) = \underline{0}.$$

Allora si può riscrivere P_i nel seguente modo:

$$P_i = \left(1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j \right) P_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j P_j.$$

Dal momento che la scrittura di P_i è unica per ipotesi, $\lambda_j = 0 \; \forall \, 1 \leq j \leq k$ con $j \neq i$, e dunque l'insieme di vettori $\{P_j - P_i \mid 1 \leq j \leq k, j \neq i\}$ è linearmente indipendente, per cui (ii) $\implies$ (iii). Analogamente si deduce anche che (iii) $\implies$ (i) e che (iii) $\implies$ (iv). Pertanto (i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iii).

Si assuma ora l'ipotesi (iv) e sia $t \in \mathbb{N}^+ \mid 1 \leq t \leq k$ tale che $t \neq i$. Siano dunque λ_1, ..., λ_k, con λ_t escluso, tale che:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{k} \lambda_j (P_j - P_t) = \underline{0}.$$

Allora si può riscrivere la somma come:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{k} \lambda_j (P_j - P_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{k} \lambda_j (P_t - P_i) = \underline{0},$$

ossia come combinazione lineare dei vettori della forma $P_j - P_i$. Allora, poiché per ipotesi tali vettori sono linearmente indipendenti, vale che:

$$\begin{cases} \lambda_j = 0 & \text{se } j \neq t \text{ e } j \neq i, \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq t}}^{k} \lambda_j = 0 & \implies \lambda_i = 0. \end{cases}$$

Pertanto l'insieme di vettori $\{P_j - P_t \mid 1 \leq j \leq k, j \neq t\}$ è linearmente indipendente, da cui vale che (iv) $\implies$ (iii). Si conclude dunque che (i) $\iff$ (ii) $\iff$ (iii) $\iff$ (iv), ossia la tesi. $\square$

Osservazione.
▶ Si osserva che il numero massimo di punti affinemente indipendenti di un sottospazio affine D di dimensione k è $k+1$, dacché, fissato un punto, vi possono essere al più k vettori linearmente indipendenti.
▶ Un punto di E è sempre affinemente indipendente, dacché la sua unica combinazione affine è sé stesso.

Definizione (riferimento affine)**.** Sia $D \subseteq E$ un sottospazio affine di E di dimensione $k-1$. Siano i punti P_1, ..., P_k dei punti affinemente indipendenti. Allora si dice che tali punti formano un **riferimento affine** di D.

Definizione (coordinate affini)**.** Sia $D \subseteq E$ un sottospazio affine di E di dimensione $k-1$ e siano i punti P_1, ..., P_k un riferimento affine R di D. Allora, se $P = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k \in D$ con $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$, si dice che le **coordinate affine** di P sono rappresentate dal punto $[P]_{\mathcal{B}}$, dove:

$$[P]_R = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K}) \,.$$

Osservazione.
▶ Esiste sempre un riferimento affine di un sottospazio affine D di E. Infatti, dato un punto P_1 di E, e una base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_k}\}$ della direzione D_0, i punti P_1, $P_1 + \underline{v_1}$, ..., $P_1 + \underline{v_k}$ formano un riferimento affine.
▶ Dalla definizione sopra si deduce che, scelto un riferimento affine R, esiste una mappa iniettiva $[\cdot]_R : D \to \mathcal{A}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$, dove l'immagine di P mediante $[\cdot]_R$ è esattamente il vettore contenente le coordinate affini di P.

Proposizione. Sia $E = \mathcal{A}_{\mathrm{n}}(\mathbb{K})$. Allora i punti P_1, ..., P_k sono affinemente indipendenti se e solo se i vettori $\hat{P}_1 = \begin{pmatrix} P_1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ..., $\hat{P}_k = \begin{pmatrix} P_k \\ 1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

($\implies$) Siano λ_1, ..., $\lambda_k \in \mathbb{K}$ tali che $\lambda_1 \hat{P}_1 + \ldots + \lambda_k \hat{P}_k = \underline{0}$. Allora $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ e $\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k = 0$.

Pertanto, sapendo che $\lambda_1 = -\lambda_2 + \ldots - \lambda_k$, vale la seguente identità:

$$\lambda_2(P_2 - P_1) + \ldots + \lambda_k(P_k - P_1) = 0.$$

Poiché i punti P_1, ..., P_k sono affinemente indipendenti, per la proposizione precedente, allora i vettori $P_2 - P_1$, ..., $P_k - P_1$ sono linearmente indipendenti, per cui $\lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$. Pertanto anche $\lambda_1 = 0$, e quindi i vettori $\hat{P}_1$, ..., $\hat{P}_k$ sono linearmente indipendenti.

($\Longleftarrow$) Siano λ_2, ..., $\lambda_k \in \mathbb{K}$ tali che $\lambda_2(P_2 - P_1) + \ldots + \lambda_k(P_k - P_1) = 0$. Sia allora $\lambda_1 = -\lambda_2 + \ldots - \lambda_k$. Si osserva dunque che $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 0$ e che $\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k = 0$, da cui si deduce che $\lambda_1 \hat{P}_1 + \ldots + \lambda_k \hat{P}_k = 0$. Dal momento però che $\hat{P}_1$, ..., $\hat{P}_k$ sono linearmente indipendenti, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$, da cui la tesi, per la proposizione precedente. $\square$

Definizione (combinazione convessa)**.** Si dice che una combinazione affine $\sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$ nei punti P_1, ..., P_k con $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ è una **combinazione convessa** se $\lambda_i \geq 0 \; \forall \, 1 \leq i \leq k$.

Definizione (baricentro)**.** Si definisce **baricentro** dei punti P_1, ..., P_k la combinazione convessa $\sum_{i=1}^k \frac{1}{k} P_i$.

Definizione (inviluppo convesso)**.** Si definisce l'**inviluppo complesso** $\mathrm{IC}(S)$ di un insieme $S \subseteq E$ l'insieme delle combinazioni convesse finite di S.

Osservazione.

▶ L'insieme $\mathrm{IC}(S)$ è, effettivamente, un insieme convesso, se $S \subseteq E$. Se infatti P, $Q \in \mathrm{IC}(S)$, allora $\lambda_1 P + \lambda_2 Q \in \mathrm{IC}(S)$, con λ_1, $\lambda_2 \geq 0$, e quindi $[P, Q] \subseteq \mathrm{IC}(S)$.

▶ Se $E = \mathcal{A}_2(\mathbb{R})$, e P_1, P_2, P_3 sono tre punti di E, l'inviluppo convesso dei tre punti è esattamente il triangolo costruito sui tre punti. Analogamente, presi quattro punti di $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$, l'inviluppo convesso dei quattro punti è un tetraedro.

Definizione (applicazione affine)**.** Si definisce **applicazione affine** da E a E' un'applicazione $\varphi : E \to E'$ che conservi le combinazioni affini, ossia tale che:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi(P_i), \quad \text{se } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0.$$

Osservazione.

▶ Come per le applicazioni lineari, la somma e la composizione di più applicazioni affini è ancora una applicazione affine.

▶ Se si sceglie un riferimento affine di E, φ è univocamente determinata da come agisce su tale riferimento.

Teorema. Sia $\varphi : E \to E'$ un'applicazione affine. Allora esiste un'unica applicazione lineare $g : V \to V'$ tale per cui $\varphi(P) = \varphi(O) + g(P - O)$ $\forall\, P \in E$, invariante per la scelta di $O \in E$.

Dimostrazione. Sia $O \in E$. Si consideri l'applicazione $g : V \to V'$ tale per cui $g(\underline{v}) = \varphi(O + \underline{v}) - \varphi(O)$. Si verifica che g è lineare:

- $g(\underline{v}+\underline{w}) = \varphi(O+\underline{v}+\underline{w}) - \varphi(O) = \varphi((O+\underline{v}) + (O+\underline{w}) - O) - \varphi(O) = \varphi(O + \underline{v}) - \varphi(O) + \varphi(O + \underline{w}) - \varphi(O) = g(\underline{v}) + g(\underline{w})$ (additività),
- $g(a\underline{v}) = \varphi(O + a\underline{v}) - \varphi(O) = \varphi(a(O + \underline{v}) + (1 - a)O) - \varphi(O) = a\varphi(O + \underline{v}) + (1 - a)\varphi(O) - \varphi(O) = ag(\underline{v})$ (omogeneità).

Inoltre, $\varphi(P) = \varphi(O+P-O) = \varphi(O)+\varphi(P)-\varphi(O) = \varphi(O)+g(P-O)$. Si osserva infine che g è unica per costruzione. Si verifica allora che scegliendo $O' \in E$ al posto di O, la costruzione di g è invariante, ossia che $\varphi(O' + \underline{v}) - \varphi(O') = \varphi(O + \underline{v}) - \varphi(O)$ $\forall\, \underline{v} \in V$. Infatti $\varphi(O' + \underline{v}) - \varphi(O') = \varphi(O' - O + (O + \underline{v})) - \varphi(O') = \varphi(O') - \varphi(O) + \varphi(O + \underline{v}) - \varphi(O') = \varphi(O + \underline{v}) - \varphi(O)$, da cui la tesi. $\square$

Osservazione. Data un'applicazione lineare g da V in V' e dati $O \in E$, $O' \in E$, si può sempre costruire un'applicazione affine φ tale che $\varphi(P) = O' + g(P - O)$. Infatti, se $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $\varphi\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i P_i\right) = O' + g\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (P_i - O)\right)) = O' + \sum_{i=1}^n \lambda_i\, g(P_i - O) = O' + \sum_{i=1}^n \lambda_i\, (\varphi(P_i) - O') = \sum_{i=1}^n \lambda_i\, \varphi(P_i)$.

Definizione (applicazione lineare associata ad un'applicazione affine)**.** Data un'applicazione affine $\varphi : E \to E'$ e dato $O \in E$, si definisce $g : V \to V'$ tale che $g(\underline{v}) = \varphi(O + \underline{v}) - \varphi(O)$ come l'**applicazione lineare associata a** φ.

Osservazione.
▶ Siano $E = \mathcal{A}_\mathrm{n}(\mathbb{K})$ ed $E' = \mathcal{A}_m(\mathbb{K})$. Allora, se φ è un'applicazione affine da E a E', $\varphi(\underline{x}) = \varphi(\underline{0}) + g(\underline{x} - \underline{0}) = A\underline{x} + \underline{b}$ $\forall\, \underline{x} \in E$, dove A è la matrice associata di g nelle basi canoniche di $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^m$ e $\underline{b} = \varphi(\underline{0})$.

▶ Se g e g' sono le applicazioni lineari associate alle applicazioni affini $\varphi : E \to E'$ e $\varphi' : E' \to E''$, allora $g \circ g'$ è l'applicazione lineare associata a $\varphi \circ \varphi'$ e $\varphi + \varphi'$. Infatti, se $O \in E$, $\varphi(\varphi'(P)) = \varphi(\varphi'(O) + g'(P - O)) = \varphi(\varphi'(O)) + g(g'(P - O))$.

Definizione (affinità)**.** Un'applicazione affine da E in E si dice **affinità** se è bigettiva.

Osservazione. Affinché un'applicazione affine sia un'affinità è necessario e sufficiente che la sua applicazione lineare sia invertibile. Infatti, se $\varphi : E \to E$ è un'applicazione affine e l'applicazione lineare associata $g : V \to V'$ è invertibile, allora $\varphi(P) = \varphi(Q) \implies \varphi(O)+g(P-O) = \varphi(O)+g(Q-O) \implies g(P-O) = g(Q-O) \implies P-O = Q-O \implies P = Q$ (iniettività), e $\forall\, P \in E$, $\varphi(O + g^{-1}(P - \varphi(O))) = \varphi(O) + g(g^{-1}(P - \varphi(O))) = P$ (surgettività). Analogamente si dimostra il viceversa.

Definizione (gruppo delle affinità di uno spazio affine)**.** Si indica con $A(E)$ il gruppo, mediante l'operazione di composizione, delle affinità di E.

Osservazione.
▶ Un esempio notevole di affinità è la **traslazione** $\tau_{\underline{v}} : E \to E$ tale che $\tau_{\underline{v}}(Q) = Q + \underline{v}$, dove $\underline{v} \in V$. In particolare l'applicazione associata a tale affinità è l'identità. Infatti, se $O \in E$, $g(\underline{v}) = \tau_{\underline{v}}(O + \underline{v}) - \tau_{\underline{v}}(O) = (O + 2\underline{v}) - (O + \underline{v}) = \underline{v}$.
▶ L'applicazione $\zeta : A(E) \to \mathrm{GL}(V)$ che associa ad un'affinità l'applicazione ad essa associata è un epimorfismo di gruppi. Infatti, dato un endomorfismo invertibile di V, vi si può costruire sopra, come visto prima, un'affinità. Inoltre vale che $\zeta(f \circ f') = \zeta(f) \circ \zeta(f')$, per $f,\ f' \in A(E)$.
▶ Vale che $\operatorname{Ker} \zeta$ è esattamente il sottogruppo normale di $A(E)$ delle traslazioni, dal momento che sono le uniche affinità la cui applicazione lineare associata è l'identità.