Applicazioni bilineari e multilineari

nota: si assumono dimensioni finite

oss: V, W spazi vett. su $\mathbb{K}$. $\dim(V^* \times W^*) = \dim V + \dim W$.
$\dim (V \times W)^* = \dim V + \dim W$. Quindi $V^* \times W^* \cong (V \times W)^*$.
Un esempio di isomorfismo è $(f, g) \mapsto [(\underline{v}, \underline{w}) \mapsto f(\underline{v}) + g(\underline{w})]$.

Def. $f \in V^*$, $g \in W^*$. $f \otimes g : V \times W \to \mathbb{K}$, $(\underline{v}, \underline{w}) \mapsto$
$\mapsto f(\underline{v})\, g(\underline{w})$.

oss. $f \otimes g$ non è un app. lineare.

Def. Un'app. $\varphi : V \times W \to U$ si dice **BILINEARE** se:

(i) $\varphi(\alpha \underline{v} + \beta \underline{v}', \underline{w}) = \alpha \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \beta \varphi(\underline{v}', \underline{w})$.
(ii) $\varphi(\underline{v}, \alpha \underline{w} + \beta \underline{w}') = \alpha \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \beta \varphi(\underline{v}, \underline{w}')$.

oss. $f \otimes g$ è bilineare.

Def. $Bil(V \times W, U)$ è lo spazio vett. delle app. bilineari da $V \times W$ in U.

Sia $B = \{\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}\}$ base di V, $B' = \{\underline{w_1}, \dots, \underline{w_m}\}$ base di W. Certamente $\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{v_i}$, $\underline{w} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \underline{w_j}$. Sia $\varphi \in Bil(V \times W, \mathbb{K})$.

$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(\underline{v_i}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \varphi(\underline{v_i}, \underline{w_j})$. Segue che φ è determinata dai $\varphi(\underline{v_i}, \underline{w_j})$. Viceversa $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j g_{ij}$ con $g_{ij} \in \mathbb{K}$ è t.c. $\varphi \in Bil(V \times W, \mathbb{K})$.

Ossia $Bil(V \times W, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{B \times B'} \Rightarrow \dim Bil(V \times W, \mathbb{K}) = \dim V \cdot \dim W$

Sia $B^* = \{\underline{v_1}^*, \dots, \underline{v_n}^*\}$ base di V^* e $(B')^* = \{\underline{w_1}^*, \dots, \underline{w_m}^*\}$ base di W^*, con $\underline{v_i}^*(\underline{v_j}) = \delta_{ij}$, $\underline{w_i}^*(\underline{w_j}) = \delta_{ij}$.

OSS. $\underline{v_h}^* \otimes \underline{w_k}^* (\underline{v}, \underline{w}) = \underline{v_h}^*(\underline{v}) \underline{w_k}^*(\underline{w}) = \alpha_h \beta_k$.

In particolare $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \varphi(\underline{v_i}, \underline{w_j}) =$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\underline{v_i}^*(\underline{v}) \otimes \underline{w_j}^*(\underline{w})) \underbrace{\varphi(\underline{v_i}, \underline{w_j})}_{g_{ij}}.$$

Quindi $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} g_{ij} \cdot \underline{v_i}^* \otimes \underline{w_j}^*$, ossia i $\underline{v_i}^* \otimes \underline{w_j}^*$ generano. Poiché sono tanti quanti la dimensione, formano una BASE.

Def. Si può definire $Bil(V \times W, \mathbb{K}) = V^* \otimes W^*$, il PRODOTTO TENSORIALE di V^* e W^*.

OSS. $F: V^* \times W^* \longrightarrow V^* \otimes W^*$, $(f,g) \mapsto f \otimes g$. F è bilineare, ma non è surgettiva.

$$A = \begin{bmatrix} x_1 f(\underline{v_1}) \\ \vdots \quad \vdots \\ x_n f(\underline{v_n}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 g(\underline{w_1}) & \cdots & y_m g(\underline{w_m}) \end{bmatrix}$$

$$F(f,g): (\underline{v}, \underline{w}) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \underbrace{x_i y_j f(\underline{v_i}) g(\underline{w_j})}_{a_{ij}}$$

$a_{ij} \longrightarrow rg(A) = 1.$ (o nel caso limite 0)

Def. Si possono definire le app. multilineari di $Mult(\underline{V_1} \times \cdots \times \underline{V_k}, \mathbb{K})$, lineari in ogni componenti.

OSS. $\dim Mult(\underline{V_1} \times \cdots \times \underline{V_k}, \mathbb{K}) = \prod_{i=1}^{k} \dim V_i$, con base i prodotti multitensoriali $\underline{v_i}^{*(1)} \otimes \cdots \otimes \underline{v_i}^{*(k)}$. Inoltre $Mult(V_1 \times \cdots \times V_k, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{B_1 \times \cdots \times B_k}$, con B_i base di V_i.

OSS. Analogamente $F: V_1^* \times \cdots \times V_k^* \to V_1^* \otimes \cdots \otimes V_k^*$, $(f_1, \ldots, f_k) \mapsto f_1 \otimes \cdots \otimes f_k$ non è surgettiva.

In particolare ci si concentra su $Mult(V \times \cdots \times V, \mathbb{K}) = V^* \otimes \cdots \otimes V^*$, che, data $B = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ base di V, ha base $\{ \underline{v_{i_1}}^* \otimes \dots \underline{v_{i_n}}^* \mid \underline{v_{i_j}} \in B \}$.

Def. Un app. multilin. $\varphi \in V^{*h}$ si dice SIMMETRICA se una permutazione degli argomenti non ne cambia l'immagine:

$$\forall \sigma \in S_n,\ \varphi(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}) = \varphi(\underline{v_{\sigma(1)}}, \dots, \underline{v_{\sigma(n)}})$$

Def. φ si dice ANTISIMMETRICA o ALTERNANTE se

$$\exists\, i \neq j \mid \underline{v_i} = \underline{v_j} \implies \varphi(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}) = 0$$

OSS. $\varphi(\dots, \underline{v}' + \underline{v}'', \dots, \underline{v}' + \underline{v}'', \dots) = 0 \implies$ (i)

$$\implies \underbrace{\varphi(\dots, \underline{v}', \dots, \underline{v}', \dots)}_{=0} + \underbrace{\varphi(\dots, \underline{v}'', \dots, \underline{v}'', \dots)}_{=0} +$$

$$+ \varphi(\dots, \underline{v}', \dots, \underline{v}'', \dots) + \varphi(\dots, \underline{v}'', \dots, \underline{v}', \dots) = 0 \implies$$

(ii) $\implies \varphi(\dots, \underline{v}', \dots, \underline{v}'', \dots) = -\varphi(\dots, \underline{v}'', \dots, \underline{v}', \dots)$, i.e. scambiare due argomenti cambia il segno dell'immagine; effettuarlo pari volte lascia il segno invariato.

OSS. (ii) $\implies$ (i) se 2 è invertibile su $\mathbb{K}$ (i.e. $2 \neq 0$).

OSS. φ antisimm. $\Rightarrow \forall \sigma \in S_n,\ f(\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, f(\underline{v_{\sigma(1)}}, \dots, \underline{v_{\sigma(n)}})$.

OSS. Le multilin. simm. formano un sottospazio detto $Sym^n(V)$, cosi' come quello delle antisimmetriche è detto $\Lambda^n(V)$.