Successioni per ricorrenza

Def. Si dice che una successione e' definita per ricorrenza in modo autonomo se è della forma:

$$\begin{cases} x_0 = c_0 \\ \vdots \\ x_k = c_k \\ x_n = f(x_{n-1}, \dots, x_{n-k-1}) \end{cases}$$

(k viene detto ordine di ricorrenza)

Def. Si dice che una successione e' definita per ricorrenza in modo non autonomo se è della forma:

$$\begin{cases} x_0 = c_0 \\ \vdots \\ x_k = c_k \\ x_n = f(x_{n-1}, \dots, x_{n-k-1}, n) \end{cases}$$

OSS. Le successioni formano su uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ (o qualsiasi campo $\mathbb{K}$). Pertanto, nel caso di ricorrenze autonome lineari, valgono le proprieta' piu' comuni viste per le eq. diff. (e.g. tutte le soluzioni di una tale ricorrenza sono contenute e riempiono $\text{Ker}(R) + \underline{s}$, dove $\text{Ker}(R)$ risolvono l'omogenea associata e $\underline{s}$ è una sol. particolare).

es. $\begin{cases} x_0 = \alpha_0 \\ x_1 = \alpha_1 \\ x_{m+2} = a x_{m+1} + b x_m \end{cases}$ $\lambda^2 = a\lambda + b$ è detta eq. caratteristica

(si sostituisce $x_m = \lambda^m$)

se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x_m = \alpha \lambda_1^m + \beta \lambda_2^m \\ x_0 = \alpha_0 \\ x_1 = \alpha_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \alpha + \beta \\ \alpha_1 = \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 \end{cases}$

se $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x_m = \alpha \lambda^m + \beta m \lambda^m \\ x_0 = \alpha_0 \\ x_1 = \alpha_1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \alpha \\ \alpha_1 = (\alpha + \beta)\lambda \end{cases}$

se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: $\lambda_1 = \overbrace{a+bi}^{\rho e^{i\theta}}$ e $\lambda_2 = \overbrace{a-bi}^{\rho e^{-i\theta}}$.

$$\frac{1}{2}(\lambda_1^n + \lambda_2^n) = \frac{1}{2}(\rho^n e^{in\theta} + \rho^n e^{-in\theta}) =$$

$$= \rho^n \left(\frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}\right) = \rho^n \cos(n\theta) \} \text{ sol.}$$

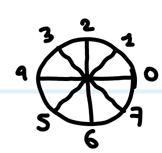
Analogamente $\rho^n \sin(n\theta)$ è soluzione.

es. $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = 2 \\ x_{n+2} = 2x_{n+1} - 2x_m \end{cases}$ $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$

$\sqrt{2}^n \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$ $\sqrt{2}^n \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$

$$x_m = \alpha \sqrt{2}^n \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \beta \sqrt{2}^n \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

$\downarrow$



$$x_n = \begin{cases} \alpha\sqrt{2}^n & \text{se } m \equiv 0 \ (8) \\ \alpha\sqrt{2}^{n-1} + \beta\sqrt{2}^{n-1} & \text{se } m \equiv 1 \ (8) \\ \beta\sqrt{2}^n & \text{se } m \equiv 2 \ (8) \\ -\alpha\sqrt{2}^{n-1} + \beta\sqrt{2}^{n-1} & \text{se } m \equiv 3 \ (8) \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 1 = \alpha \\ x_1 = \alpha + \beta = 1 + \beta \Rightarrow \beta = 1 \end{cases}$$

es. $\begin{cases} x_0 = c \\ x_n = a x_{n-1} + b \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_n = a^n c + \frac{a^n - 1}{a - 1} b & (a \neq 1) \\ x_n = c + nb & (a = 1) \end{matrix}$

Prop. Sia (y_n) una successione definita per ricorrenza autonoma lineare omogenea di ordine k. Allora, detto X lo spazio delle successioni che soddisfano l'eq. ricorsiva di (y_n), $T : X \to \mathbb{R}^k$, $(x_n) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ è un isomorfismo.

Chiaramente T è un'app. lineare. Si mostra che T è iniettiva, ossia che $\operatorname{Ker} T = \{\underline{0}\}$. Sia dunque $(z_n) \in X$ tale che $T((z_n)) = \underline{0}$. Allora $z_1 = \cdots = z_k = 0$. Sia $z_{n+k+1} = \alpha_1 z_{n+k} + \cdots + \alpha_k z_{n+1}$ l'eq. ricorsiva che caratterizza X: induttivamente si ottiene che $z_{n+k+1} = 0 \ \forall n \geq 0 \Rightarrow (z_n) = \underline{0}$; quindi $\operatorname{Ker} T = \{\underline{0}\}$.
T è infine chiaramente surgettiva, dacché, dato $\underline{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$, si può induttivamente costruire, mediante l'eq. ricorsiva di X, una successione $(z_n) \mid z_1 = x_1, \ldots, z_k = x_k$, $(z_n) \in X$. Allora T è un isomorfismo. $\square$

OSS. $\dim \mathcal{X} = \dim \mathbb{K}^n = n.$