Normalizzatore e teorema di Cayley

di Gabriel Antonio Videtta

Nota. Nel corso del documento per $(G, \cdot)$ si intenderà un qualsiasi gruppo.

Sia $X = \{H \subseteq G \mid H \leq G\}$ l'insieme dei sottogruppi di G. Allora si può costruire un'azione $\varphi : G \to S(X)$ in modo tale che:

$$g \overset{\varphi}{\mapsto} \left[H \mapsto gHg^{-1}\right].$$

Si definisce **normalizzatore** lo stabilizzatore di un sottogruppo H (e si indica con $N_G(H)$), mentre $\mathrm{Orb}(H)$ è l'insieme dei **coniugati** di H. In particolare $N_G(H)$ è il massimo sottogruppo per inclusione in cui H è normale.

Si osserva ora in modo cruciale che $H \trianglelefteq G$ se e solo se $\mathrm{Orb}(H) = \{H\}$, e quindi se e solo se $N_G(H) = G$. Analogamente si osserva che H è normale se e solo se:

$$H = \bigcup_{h \in H} \mathrm{Cl}(h).$$

Si illustra adesso un risultato principale della teoria dei gruppi che mette in relazione ogni gruppo con il proprio gruppo di bigezioni, ed ogni gruppo finito con i sottogruppi dei gruppi simmetrici.

Teorema (di Cayley)**.** Ogni gruppo è isomorfo a un sottogruppo del suo gruppo di bigezioni. In particolare, ogni gruppo finito G è isomorfo a un sottogruppo di un gruppo simmetrico.

Dimostrazione. Si consideri l'azione[1] $\varphi : G \to S(G)$ tale per cui:

$$g \overset{\varphi}{\mapsto} [h \mapsto gh].$$

Si mostra che φ è fedele[2]. Sia infatti $\varphi(g) = \mathrm{Id}$; allora vale che $ge = e \implies g = e$. Quindi $\operatorname{Ker} \varphi$ è banale, e per il Primo teorema di isomorfismo vale che:

$$G \cong \operatorname{Im} \varphi \leq S(G).$$

Se G è finito, $S(G)$ è isomorfo a S_n, dove $n := |G|$, e quindi $\operatorname{Im} \varphi$ è a sua volta isomorfo a un sottogruppo di S_n, da cui la tesi. □

[1] Tale azione prende il nome di **rappresentazione regolare a sinistra**. Si può infatti definire un'azione analoga a destra ponendo $g \mapsto \left[h \mapsto hg^{-1}\right]$, costruendo dunque una *rappresentazione regolare a destra*.

[2] L'azione φ è molto più che fedele; è infatti innanzitutto libera.

Si presentano adesso due risultati interessanti legati ai sottogruppi normali di un gruppo G.

Proposizione. Sia $H \leq G$. Allora, se $[G : H] = 2$, H è normale in G.

Dimostrazione. Poiché $[G : H] = 2$, le uniche classi laterali sinistre rispetto ad H in G sono H e $gH = G \setminus H$, dove $g \notin H$. Analogamente esistono due sole classi laterali destre, H e $Hg = G \setminus H$. In particolare gH deve obbligatoriamente essere uguale a Hg, e quindi $gHg^{-1} = H$, da cui la tesi. $\square$

Proposizione. Siano $K \leq H \leq G$. Allora, se H è normale in G e K è caratteristico in H, K è normale in G.

Dimostrazione. Sia $\varphi_g \in \mathrm{Inn}(G)$. Poiché H è normale in G, $\varphi_g(H) = H$. Pertanto si può considerare la restrizione di φ_g su H, $\varphi_g|_H$. In particolare $\varphi_g|_H$ è un automorfismo di $\mathrm{Aut}(H)$, e quindi, poiché K è caratteristico in H, $\varphi_g|_H(K) = K$, da cui si deduce che $gKg^{-1} = K$ per ogni $g \in G$. $\square$