Scheda riassuntiva di Geometria 2

Geometria proiettiva

Spazi e trasformazioni proiettive

Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia V uno spazio proiettivo. Sia $\sim$ la seguente relazione di equivalenza su $V \setminus \{\underline{0}\}$ tale per cui

$$\underline{v} \sim \underline{w} \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^* \mid \underline{v} = \lambda \underline{w}.$$

Allora si definisce lo **spazio proiettivo** associata a V, denotato con $\mathbb{P}(V)$, come:

$$\mathbb{P}(V) = V \setminus \{\underline{0}\}/\sim.$$

In particolare esiste una bigezione tra gli elementi dello spazio proiettivo e le rette di V (i.e. i sottospazi di V con dimensione 1). Si definisce la *dimensione* di $\mathbb{P}(V)$ come:

$$\dim \mathbb{P}(V) := \dim V - 1.$$

Gli spazi proiettivi di dimensione 1 sono detti *rette proiettive*, mentre quelli di dimensione 2 *piani*. Si dice **spazio proiettivo standard di dimensione** n lo spazio proiettivo associato a $\mathbb{K}^{n+1}$, e viene denotato come $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) := \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$. Si indica con π la proiezione al quoziente tramite $\sim$, ossia:

$$\pi(W) = \{[\underline{w}] \mid \underline{w} \in W\}.$$

Si dice **sottospazio proiettivo** un qualsiasi sottoinsieme S di $\mathbb{P}(V)$ tale per cui esista un sottospazio vettoriale W di V tale per cui $S = \pi(W \setminus \{\underline{0}\})$, e si scrive $S = \mathbb{P}(W)$, con:

$$\dim S = \dim W - 1.$$

In particolare, tramite π si descrive una bigezione tra i sottospazi vettoriali di V e i sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$.

L'intersezione di sottospazi proiettivi è ancora un sottospazio proiettivo ed è indotto dall'intersezione degli spazi vettoriali che generano i singoli sottospazi proiettivi. Pertanto, se $F \subseteq \mathbb{P}(V)$, è ben definito il seguente sottospazio:

$$L(F) = \bigcap_{\substack{F \subseteq S_i \\ S_i \text{ ssp. pr.}}} S_i,$$

ossia l'intersezione di tutti i sottospazi proiettivi che contengono F. Si scrive $L(S_1, \ldots, S_n)$ per indicare $L(S_1 \cup \cdots \cup S_n)$. Se $S_1 = \mathbb{P}(W_1)$, ..., $S_n = \mathbb{P}(W_n)$, allora vale che:

$$L(S_1, \ldots, S_n) = \mathbb{P}(W_1 + \ldots + W_n).$$

Vale pertanto la **formula di Grassmann proiettiva**:

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$

Allora, se $\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}(V)$ (si osservi che è $\geq$ e non $>$ come nel caso vettoriale, dacché un sottospazio di dimensione zero è comunque un punto in geometria proiettiva), vale necessariamente che:

$$S_1 \cap S_2 \neq \varnothing,$$

infatti $\dim S_1 \cap S_2 = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim L(S_1, S_2) \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim \mathbb{P}(V) \geq 0$. In particolare, in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, questo implica che due rette proiettive distinte si incontrano sempre in un unico punto (infatti $1 + 1 \geq 2$).

Sia W uno spazio vettoriale. Una mappa $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ si dice **trasformazione proiettiva** se è tale per cui esiste un'applicazione lineare $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ che soddisfa la seguente identità:

$$f([\underline{v}]) = [\varphi(\underline{w})],$$

dove con $[\cdot]$ si denota la classe di equivalenza in $\mathbb{P}(V)$. Si scrive in questo caso che $[\varphi] = f$. Una trasformazione proiettiva invertibile da $\mathbb{P}(V)$ in $\mathbb{P}(W)$ si dice **isomorfismo proiettivo**. Una trasformazione proiettiva da $\mathbb{P}(V)$ in $\mathbb{P}(V)$ si dice **proiettività**.

- Se f è una trasformazione proiettiva, allora φ è necessariamente iniettiva (altrimenti l'identità non sussisterebbe, dacché $[\underline{0}]$ non esiste – la relazione d'equivalenza $\sim$ è infatti definita su $V \setminus \{\underline{0}\}$).
- Allo stesso tempo, un'applicazione lineare φ iniettiva induce sempre una trasformazione proiettiva f,
- Se f è una trasformazione proiettiva, allora f è in particolare anche iniettiva (infatti $[\varphi(\underline{v})] = [\varphi(\underline{w})] \implies \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^* \mid \underline{v} = \lambda \underline{w} \implies \underline{v} \sim \underline{w}$),
- La composizione di due trasformazioni proiettive è ancora una trasformazione proiettiva ed è indotta dalla composizione delle app. lineari associate alle trasformazioni di partenza,
- L'identità Id è una proiettività di $\mathbb{P}(V)$, ed è indotta dall'identità di V.

Poiché allora nelle proiettività di V esiste un'identità, un inverso e vale l'associatività nella composizione, si definisce $\mathbb{P}\mathrm{GL}(V)$ come il gruppo delle proiettività di V rispetto alla composizione. In particolare si pone la seguente definizione

$$\mathbb{P}\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K}) := \mathbb{P}\mathrm{GL}(\mathbb{K}^{n+1}).$$

Sono inoltre equivalenti i seguenti fatti:

(i) f è surgettiva,
(ii) f è bigettiva,
(iii) $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$,
(iv) f è invertibile e f^{-1} è una trasformazione proiettiva.

In particolare φ^{-1} induce esattamente f^{-1}.

- I punti fissi di f sono indotti esattamente dalle rette di autovettori di φ (infatti $\varphi(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \implies f([\underline{v}]) = [\underline{v}]$),
- In particolare, $f \in \mathbb{P}\mathrm{GL}(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ ammette sempre un punto fisso se n è pari (il polinomio caratteristico di φ ha grado dispari, e quindi ammette una radice in $\mathbb{R}$),
- Se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, f ammette sempre un punto fisso (il polinomio caratteristico di φ ha tutte le radici in $\mathbb{K}$).

Riferimenti proiettivi, teorema fondamentale della geometria proiettiva e coordinate omogenee

Più punti P_1, ..., P_k si dicono **indipendenti** se e solo se i vettori delle loro classi di equivalenza sono tra di loro linearmente indipendenti. In particolare, P_1, ..., P_k sono indipendenti se e solo se $\dim L(P_1, \ldots, P_k) = k - 1$. Analogamente al caso vettoriale, se $\dim \mathbb{P}(V) = n$, presi più di $n + 1$ punti, questi sono sicuramente non indipendenti.

Un insieme $\{P_1, \ldots, P_k\}$ si dice *in posizione generale* se e solo se ogni suo sottoinsieme di $h \leq n + 1$ punti è indipendente. Se $k \leq n + 1$, un insieme è in posizione generale se e solo se è indipendente. Altrimenti, l'insieme è in posizione generale se ogni sottoinsieme di $n + 1$ punti è indipendente.

Si dice **riferimento proiettivo** una qualsiasi $(n + 2)$-upla di punti P_1, ..., P_{n+2} in posizione generale. In particolare, si dice che i punti P_1, ..., P_{n+1} sono i **punti fondamentali** del riferimento, mentre P_{n+2} è il **punto unità**. Una base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_{n+1}}\}$ di V si dice **base normalizzata** rispetto a P_1, ..., P_{n+2} se:

$$P_i = [\underline{v_i}]\ \forall\, i \leq n + 1 \qquad P_{n+2} = [\underline{v_1} + \ldots + \underline{v_n}].$$

Una base normalizzata per R esiste sempre ed è unica a meno di *riscalamento simultaneo* (ossia a meno di moltiplicare ogni vettore della base per uno stesso $\lambda \in \mathbb{K}^*$). In particolare, se $P_i = [\underline{v_i}]$ con $i \leq n + 1$ e $P_{n+2} = [\underline{v}]$, dacché $\{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_{n+1}}\}$ è una base di V esistono $\alpha_i \in \mathbb{K}$ per cui:

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v_1} + \ldots + \alpha_{n+1} \underline{v_{n+1}},$$

con $\alpha_i \neq 0$ (altrimenti si avrebbero $n + 1$ vettori linearmente dipendenti, contraddicendo la posizione generale). Allora $\{\alpha_1 \underline{v_1}, \ldots, \alpha_{n+1} \underline{v_{n+1}}\}$ è una base normalizzata per il riferimento proiettivo.

Sia d'ora in poi $R = \{P_1, \ldots, P_{n+2}\}$ un riferimento proiettivo e $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_{n+1}}\}$ una base normalizzata rispetto ad R. Se $f = [\varphi]$, $g = [\psi]$ sono trasformazioni da $\mathbb{P}(V)$ in $\mathbb{P}(W)$, sono equivalenti i seguenti fatti:

- $\varphi = \lambda \psi$ per $\lambda \in \mathbb{K}^*$,
- $f = g$,
- $f(P_i) = g(P_i)$ per $1 \leq i \leq n + 2$.

Come conseguenza di questo fatto, vale che:

$$\mathbb{P}\mathrm{GL}(V) \cong GL(V)/N,$$

dove $N = \{\lambda \mathrm{Id}_V \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\}$ (è sufficiente considerare l'omomorfismo $\zeta : GL(V) \to \mathbb{P}\mathrm{GL}(V)$ tale per cui $f \xmapsto{\zeta} [f]$).

Il **teorema fondamentale della geometria proiettiva** asserisce che se $R = \{P_1, \ldots, P_{n+2}\}$ e $R' = \{Q_1, \ldots, Q_{m+2}\}$ sono due riferimenti proiettivi di V e W e vale che $\dim \mathbb{P}(W) \geq \dim \mathbb{P}(V)$, allora, per ogni scelta di $n+2$ punti Q_1', ..., Q_{n+2}' da R', esiste un'unica trasformazione proiettiva tale per cui:

$$f(P_i) = Q_i' \;\forall\, 1 \leq i \leq n+2.$$

Se $n = m$, il teorema asserisce semplicemente che esiste un'unica trasformazione che mappa ordinatamente R in R'.

Si può costruire su R un sistema di coordinate, dette **coordinate omogenee**, per cui $P = [a_1, \ldots, a_n] = [a_1 : \cdots : a_n]$ se e solo se $P = [a_1 \underline{v_1} + \ldots + a_{n+1} \underline{v_n}]$ dove $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_{n+1}}\}$ è una base normalizzata associata a R. Per $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, si definisce il *riferimento standard* come il riferimento dato da $[\underline{e_1}]$, ..., $[\underline{e_{n+1}}]$ e $[\underline{e_1} + \ldots + \underline{e_{n+1}}]$. In tal caso vale la seguente identità:

$$[a_1, \ldots, a_n] = [(a_1, \ldots, a_n)].$$

Si osserva che $[0, \ldots, 0]$ non è mai associato a nessun punto e che due punti hanno le stesse coordinate in un riferimento proiettivo a meno di riscalamento di tutte le coordinate per uno stesso $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Ad opera di Gabriel Antonio Videtta, https://poisson.phc.dm.unipi.it/~videtta/.
Reperibile su https://notes.hearot.it, nella sezione *Secondo anno → Geometria 2 → Scheda riassuntiva.*