Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

22 marzo 2023

Forma canonica di Jordan reale e prodotto scalare

Definizione. Un **prodotto scalare** su V è una forma bilineare simmetrica φ con argomenti in V.

Esempio. Sia $\varphi : M(n, \mathbb{K})^2 \to \mathbb{K}$ tale che $\varphi(A, B) = \operatorname{tr}(AB)$.

▶ $\varphi(A + A', B) = \operatorname{tr}((A + A')B) = \operatorname{tr}(AB + A'B) = \operatorname{tr}(AB) + \operatorname{tr}(A'B) = \varphi(A, B) + \varphi(A', B)$ (linearità nel primo argomento),
▶ $\varphi(\alpha A, B) = \operatorname{tr}(\alpha AB) = \alpha \operatorname{tr}(AB) = \alpha\varphi(A, B)$ (omogeneità nel secondo argomento),
▶ $\varphi(A, B) = \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) = \varphi(B, A)$ (simmetria),
▶ poiché φ è simmetrica, φ è lineare e omogenea anche nel secondo argomento, e quindi è una forma bilineare simmetrica, ossia un prodotto scalare su $M(n, \mathbb{K})$.

Definizione. Si definisce prodotto scalare *canonico* di $\mathbb{K}^n$ la forma bilineare simmetrica φ con argomenti in $\mathbb{K}^n$ tale che:

$$\varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Osservazione. Si può facilmente osservare che il prodotto scalare canonico di $\mathbb{K}^n$ è effettivamente un prodotto scalare.

▶ $\varphi((x_1, ..., x_n) + (x_1', ..., x_n'), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + x_i')y_i = \sum_{i=1}^{n} [x_i y_i + x_i' y_i] = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x_i' y_i = \varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) + \varphi((x_1', ..., x_n'), (y_1, ..., y_n))$ (linearità nel primo argomento),
▶ $\varphi(\alpha(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i y_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \alpha\varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n))$ (omogeneità nel primo argomento),

▶ $\varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \varphi((y_1, ..., y_n), (x_1, ..., x_n))$ (simmetria),
▶ poiché φ è simmetrica, φ è lineare e omogenea anche nel secondo argomento, e quindi è una forma bilineare simmetrica, ossia un prodotto scalare su $\mathbb{K}^n$.

Esempio. Altri esempi di prodotto scalare sono i seguenti:

▶ $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}(A^\top B)$ per $M(n, \mathbb{K})$,
▶ $\varphi(p(x), q(x)) = p(a)q(a)$ per $\mathbb{K}[x]$, con $a \in \mathbb{K}$,
▶ $\varphi(p(x), q(x)) = \sum_{i=1}^n p(x_i)q(x_i)$ per $\mathbb{K}[x]$, con x_1, ..., x_n distinti,
▶ $\varphi(p(x), q(x)) = \int_a^b p(x)q(x)dx$ per lo spazio delle funzioni integrabili su $\mathbb{R}$, con a, b in $\mathbb{R}$,
▶ $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^\top A \underline{y}$ per $\mathbb{K}^n$, con $A \in M(n, \mathbb{K})$ simmetrica.

Definizione. Sia[1] $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Allora un prodotto scalare φ è **definito positivo** se $\underline{v} \neq \underline{0} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0$.

Esempio. Il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$ è definito positivo: infatti $\varphi((x_1, ..., x_n), (x_1, ..., x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \iff x_i = 0, \forall\, 1 \leq i \leq n \iff (x_1, ..., x_n) = \underline{0}$.

Al contrario, il prodotto scalare $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ non è definito positivo: $\varphi((x, y), (x, y)) = 0, \forall\ (x, y) \mid x^2 = y^2$, ossia se $y = x$ o $y = -x$.

Definizione. Dato un prodotto scalare φ di V, ad ogni vettore $\underline{v} \in V$ si associa una **forma quadratica** $q : V \to \mathbb{K}$ tale che $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v})$.

Osservazione. Si osserva che q non è lineare in generale: infatti $q(\underline{v} + \underline{w}) \neq q(\underline{v}) + q(\underline{w})$ in $\mathbb{R}^n$.

Definizione. Un vettore $\underline{v} \in V$ si dice **isotropo** rispetto al prodotto scalare φ se $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$.

Esempio. Rispetto al prodotto scalare $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$, i vettori isotropi (x, y, z) sono quelli tali che $x^2 + y^2 = z^2$, ossia i vettori stanti sul cono di eq. $x^2 + y^2 = z^2$.

[1] In realtà, la definizione è facilmente estendibile a qualsiasi campo, purché esso sia ordinato.

Osservazione. Come già osservato in generale per le app. multilineari, il prodotto scalare è univocamente determinato dai valori che assume nelle coppie $\underline{v_i}, \underline{v_j}$ estraibili da una base $\mathcal{B}$. Infatti, se $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_k})$, $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{v_i}$ e $\underline{w} = \sum_{i=1}^k \beta_i \underline{v_i}$, allora:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{1 \le i \le j \le k} \alpha_i \beta_j \, \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}).$$

Definizione. Sia φ un prodotto scalare di V e sia $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ una base ordinata di V. Allora si denota con **matrice associata** a φ la matrice:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}))_{i,\, j=1—n} \in M(n, \mathbb{K}).$$

Osservazione. Si possono fare alcune osservazioni riguardo $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

▶ $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è simmetrica, infatti $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi(\underline{v_j}, \underline{v_i})$ per definizione di prodotto scalare,
▶ $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$.

Teorema. (di cambiamento di base per matrici di prodotti scalari) Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi ordinate di V. Allora, se φ è un prodotto scalare di V e $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$, vale la seguente identità:

$$\underbrace{M_{\mathcal{B}'}(\varphi)}_{A'} = P^\top \underbrace{M_{\mathcal{B}}}_{A} P.$$

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ e $\mathcal{B}' = (\underline{w}_1, ..., \underline{w}_n)$. Allora $A'_{ij} = \varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_j) = [\underline{w}_i]_{\mathcal{B}}^\top A [\underline{w}_j]_{\mathcal{B}} = (P^i)^\top A P^j = P_i^\top (AP)^j = (P^\top AP)_{ij}$, da cui la tesi. □

Definizione. Si definisce **congruenza** la relazione di equivalenza $\sim$ definita nel seguente modo su $A, B \in M(n, \mathbb{K})$:

$$A \sim B \iff \exists\, P \in GL(n, \mathbb{K}) \mid A = P^\top AP.$$

Osservazione. Si può facilmente osserva che la congruenza è in effetti una relazione di equivalenza.

▶ $A = I^\top AI \implies A \sim A$ (riflessione),
▶ $A \sim B \implies A = P^\top BP \implies B = (P^\top)^{-1} AP^{-1} = (P^{-1})^\top AP^{-1} \implies B \sim A$ (simmetria),
▶ $A \sim B \implies A = P^\top BP$, $B \sim C \implies B = Q^\top CQ$, quindi $A = P^\top Q^\top CQP = (QP)^\top C(QP)$ (transitività).

Osservazione. Si osservano alcune proprietà della congruenza.

▶ Per il teorema di cambiamento di base del prodotto scalare, due matrici associate a uno stesso prodotto scalare sono sempre congruenti (esattamente come due matrici associate a uno stesso endomorfismo sono sempre simili).
▶ Se A e B sono congruenti, $A = P^\top BP \implies \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(P^\top BP) = \operatorname{rg}(BP) = \operatorname{rg}(B)$, dal momento che P e $P^\top$ sono invertibili; quindi il rango è un invariante per congruenza. Allora è ben definito il rango $\operatorname{rg}(\varphi)$ di un prodotto scalare come il rango di una sua qualsiasi matrice associata.
▶ Se A e B sono congruenti, $A = P^\top BP \implies \det(A) = \det(P^\top BP) = \det(P^\top)\det(B)\det(P) = \det(P)^2\det(B)$. Quindi, per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il segno del determinante è invariante per congruenza.

Definizione. Si dice **radicale** di un prodotto scalare φ lo spazio:

$$V^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0, \forall\, \underline{w} \in V\}$$

Osservazione. Il radicale di $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico ha dimensione nulla, dal momento che $\forall\, \underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$, $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0$.

Definizione. Un prodotto scalare si dice **degenere** se il radicale dello spazio su tale prodotto scalare ha dimensione non nulla.

Osservazione. Si definisce l'applicazione lineare $\alpha_\varphi : V \to V^*$ in modo tale che $\alpha_\varphi(\underline{v}) = p$, dove $p(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$.

Allora $V^\perp$ altro non è che $\operatorname{Ker} \alpha_\varphi$. Se V ha dimensione finita, $\dim V = \dim V^*$, e si può allora concludere che $\dim V^\perp > 0 \iff \operatorname{Ker} \alpha_\varphi \neq \{\underline{0}\} \iff \alpha_\varphi$ non è invertibile (infatti lo spazio di partenza e di arrivo di α_φ hanno la stessa dimensione). In particolare, α_φ non è invertibile se e solo se $\det(\alpha_\varphi) = 0$.

Sia $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ una base ordinata di V. Si consideri allora la base ordinata del duale costruita su $\mathcal{B}$, ossia $\mathcal{B}^* = (\underline{v_1^*}, ..., \underline{v_n^*})$. Allora $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\alpha_\varphi)^i = [\alpha_\varphi(\underline{v_i})]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_1}) \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_n}) \end{pmatrix} \underbrace{=}_{\varphi \text{ è simmetrica}} \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v_n}, \underline{v_i}) \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^i$.
Quindi $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\alpha_\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Si conclude allora che φ è degenere se e solo se $\det(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = 0$ e che $V^\perp \cong \operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ con l'isomorfismo è il passaggio alle coordinate.