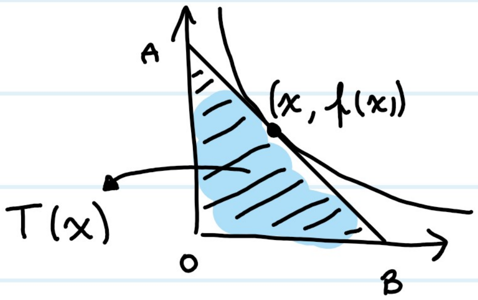
Eq. differenziali



$$T(x) = k$$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$A\left(0,\ f(x_0) - f'(x_0)x_0\right)$$

$$B\left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},\ 0\right)$$

$$T(x) = \left(f(x) - f'(x)x\right)\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right)$$

$$T'(x) = 0 \Rightarrow \left(\cancel{f'} - f''x - \cancel{f'}\right)\left(x - \frac{f}{f'}\right) + \left(\cancel{x} - \frac{\cancel{f'^2} - ff''}{f'^2}\right)$$

$$\left(f - f'x\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -f''x^2 + \cancel{\frac{ff''}{f'}x} + \frac{f^2 f''}{f'^2} - \cancel{\frac{ff''}{f'}x}$$

$$\frac{y^2 \cancel{y''}}{y'^2} = \cancel{y''}x^2 \qquad y^2 = y'^2 x^2 \Rightarrow$$

$y = -y'x$	$y = y'x$
$\ln(y) = -\ln(x) + C$	$\ln(y) = \ln(x) + C$
$y = \frac{k}{x}$	$y = kx$

Eq. diff. del I° ordine

$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ → FORMA NORMALE

$$(*) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$ ← PROBLEMA DI CAUCHY

Teorema di esistenza e unicità

Un eq. diff. del I° ordine ammette sempre soluzioni, uniche a parità di condizione iniziale.

Eq. a variabili separabili

$$\dot{x} = g(x)\, h(t) \implies \underbrace{\frac{\dot{x}}{g(x)}}_{\frac{dx}{g(x)}} = \underbrace{h(t)}_{h(t)\,dt}$$

Eq. lineari

$$y' + a(x)\,y = b(x)$$

$$e^{A(x)}\,y' + e^{A(x)}\,a(x)\,y = e^{A(x)}\,b(x)$$

$$\left(e^{A(x)}\,y\right)' = e^{A(x)}\,b(x)$$

$$e^{A(x)}\,y = \int e^{A(x)}\,b(x)\,dx + c$$

$$y = e^{-A(x)}\left(\int e^{A(x)}\,b(x)\,dx + C\right)$$

Eq. differenziali ordinarie del II° ordine

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$$

Problema di Cauchy

$$\left[\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)) \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_0) = x_1 \end{cases}\right] *$$

* il problema ammette sempre un'unica soluzione sotto opportune ipotesi.

Eq. diff. ord. lineare del II° ordine

$$x''(t) + a(t)\,x'(t) + b(t)\,x(t) = \overbrace{c(t)}^{\text{termine noto}}$$

- $c(t) = 0 \Rightarrow$ OMOGENEA
- $a(t), b(t)$ costanti $\Rightarrow$ A VALORI COSTANTI

Teorema Sia X l'insieme delle soluzioni dell'eq. lin. omog.

$x''(t) + a(t)\,x'(t) + b(t)\,x(t) = 0$ è uno SPAZIO VETTORIALE di dimensione 2.

OSS. due sol. lin. ind. sono basi di X. Dette $x_1(t), x_2(t)$, ogni soluzione è della forma $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$.

Per dimostrare che $\dim X = 2$, mostro che $X \cong \mathbb{R}^2$.

Pongo $T: X \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x(0), x'(0))$

(i) $T((a+b)(t)) = ((a+b)(0), (a+b)'(0)) =$

$= (a(0), a'(0)) + (b(0), b'(0))$

$T((\alpha a)(t)) = \alpha (a(0), a'(0))$

(ii) per Cauchy $\exists$ una sol. unica, quindi T è iniettiva

(iii) per Cauchy $\exists$ sempre una sol., quindi T è surgettiva.

Quindi T è isomorfismo.

$\boxtimes$

Lemma Sia x_1 sol. di $x'' + a(t)x' + b(t)x = c_1(t)$ e x_2 in $c_2(t)$, $\alpha x_1 + \beta x_2$ la risolve in $\alpha c_1(t) + \beta c_2(t)$.

OSS. $T : x \longmapsto x'' + a(t)x' + b(t)x$ è lineare.

Lemma Le sol. di un'eq. diff. del secondo ordine in $c(t)$ è un sottospazio affine affine delle sol. dell'omogenea associata.

OSS. Tabella di riferimento per la ricerca delle sol. particolari

$c(t)$	y
e^{at}	be^{at}
$\cos(x)/\sin(x)$	$a\cos(x) + b\sin(x)$
$p_n(x)$	$q_n(x)$
$e^{at}p_n(x)$	$e^{at}q_n(x)$
$e^{at}p_n(x)\cos(x)/\sin(x)$	$\alpha e^{at}q_{n_1}(x)\cos(x) + \beta e^{at}q_{n_2}(x)\sin(x)$

Se $c(t)$ coincide con una sol. dell' omogenea, aggiungere t; se coincide con entrambe t^2.

es. $y'' = -w^2 y$ $\quad x^2 = -w^2 \Rightarrow x = \pm wi$ $\quad$ eq. del pendolo

$$y = a\cos(wt) + b\sin(wt)$$

es. $2y'' - 5y' - 12y = 6$ $\quad y = a$

$-12a = 6 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$$2x^2 - 5x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm 11}{4} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{2} + c_1 e^{4x} + c_2 e^{-\frac{3}{2}x}$$

es. $y'' - y' - y = x + e^{-x}$

$\Downarrow$

$\cancel{ce^{-x}} - a + ce^{-x} - ax - b - \cancel{ce^{-x}} =$

$= x + e^{-x}$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} c = 1 \\ -a = 1 \Rightarrow a = -1 \\ -a - b = 0 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

$y = ax + b + ce^{-x}$

$y' = a - ce^{-x}$

$y'' = ce^{-x}$

$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \varphi \vee x = -\phi$

$$y = -x + 1 + e^{-x} + c_1 e^{\varphi x} + c_2 e^{-\phi x}$$

es.

$$y'' - 3y = x^2 - 4x + 11 \qquad y = ax^2 + bx + c$$

$$2a - 3ax^2 - 3bx - 3c = \qquad y' = 2ax + b$$

$$= x^2 - 4x + 11 \qquad y'' = 2a$$

$$\begin{cases} -3a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3} \\ -3b = -4 \Rightarrow b = \frac{4}{3} \\ 2a - 3c = 11 \Rightarrow c = \frac{2a-11}{3} = \frac{-\frac{2}{3}-11}{3} = -\frac{35}{9} \end{cases}$$

$$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{35}{9} + C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x}$$

es.

$$y'' + w^2 y = \delta \cos(at)$$

$$y = \alpha\cos(at) + \beta\sin(at)$$

$$y'' = -a^2(\alpha\cos(at) + \beta\sin(at))$$

$$\begin{cases} (w^2 - a^2)\alpha = \delta \Rightarrow \alpha = \frac{\delta}{w^2 - a^2} \\ (w^2 + a^2)\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \end{cases}$$

$w \neq \pm a$ $\quad \left[\; y = \frac{\delta}{w^2 - a^2}\cos(at) + C_1\cos(wt) + C_2\sin(wt) \right.$

$$y'' + w^2 y = \delta\cos(wt)$$

$$y = \alpha t\cos(wt) + \beta t\sin(wt)$$

$$y' = \alpha\cos(wt) + \beta\sin(wt) - \alpha w t\sin(wt) + \beta w t\cos(wt)$$

$$y'' = -\alpha w \sin(wt) + \beta w \cos(wt) - \alpha w \sin(wt) + \beta w \cos(wt)$$
$$- \alpha w^2 t \cos(wt) - \beta w^2 t \sin(wt)$$

$$-\alpha w \sin(wt) + \beta w \cos(wt) - \alpha w \sin(wt) + \beta w \cos(wt)$$
$$\cancel{- \alpha w^2 t \cos(wt)} - \cancel{\beta w^2 t \sin(wt)} + \cancel{\alpha w^2 t \cos(wt)} + \cancel{\beta w^2 t \sin(wt)} =$$
$$= \delta \cos(wt)$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\beta w = \delta \Rightarrow \beta = \dfrac{\delta}{2w} \end{cases}$$

$$y = \frac{\delta}{2w} t \cos(wt) + C_1 \cos(wt) + C_2 \sin(wt)$$

es.

$$y'' - 2ay' + (a-2)^2 y = e^t$$
$$x^2 - 2ax + (a-2)^2 = 0$$
$$x = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4(a-2)^2}}{2} = a \pm \sqrt{\cancel{a^2} - \cancel{a^2} - 4 + 4a} = a \pm 2\sqrt{a-1}$$

$$y = be^t \qquad be^t\left(1 - 2a + (a-2)^2\right) = e^t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow b = \frac{1}{1-2a+(a-2)^2} = \frac{1}{a^2 - 6a + 5} = \frac{1}{(a-5)(a-1)}$$

$a > 1$
$a \neq 5$

$$y = \frac{e^t}{(a-5)(a-1)} + e^a\left(C_1 e^{2\sqrt{a-1}\,t} + C_2 e^{-2\sqrt{a-1}\,t}\right)$$

$a<1$ $\quad y = \dfrac{e^t}{(a-1)(a-5)} + e^a \left(c_1 \cos(2\sqrt{a-1}\,t) + c_2 \sin(2\sqrt{a-1}\,t) \right)$

$a = 1{,}5$ $\quad y = bte^t \qquad y' = be^t + bte^t \qquad y'' = 2be^t + bte^t$

$y'' - 2ay' + (a-2)^2 y = e^t$

$2be^t +$