# Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

27 marzo 2023

## Proprietà e teoremi principali sul prodotto scalare

**Nota.** Nel corso del documento, per $V$ si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita $n$ e per $\varphi$ un suo prodotto scalare.

**Proposizione.** (formula delle dimensioni del prodotto scalare) Sia $W \subseteq V$ un sottospazio di $V$. Allora vale la seguente identità:

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V + \dim(W \cap V^\perp).$$

*Dimostrazione.* Si consideri l'applicazione lineare $f : V \to W^*$ tale che $f(\underline{v})$ è un funzionale di $W^*$ tale che $f(\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})\ \forall\, \underline{w} \in W$. Si osserva che $W^\perp = \operatorname{Ker} f$, da cui, per la formula delle dimensioni, $\dim V = \dim W^\perp + \operatorname{rg} f$. Inoltre, si osserva anche che $f = i^\top \circ a_\varphi$, dove $i : W \to V$ è tale che $i(\underline{w}) = \underline{w}$, infatti $f(\underline{v}) = a_\varphi(\underline{v}) \circ i$ è un funzionale di $W^*$ tale che $f(\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$. Pertanto $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(i^\top \circ a_\varphi)$.

Si consideri ora l'applicazione $g = a_\varphi \circ i : W \to W^*$. Sia ora $\mathcal{B}_W$ una base di $W$ e $\mathcal{B}_V$ una base di $V$. Allora le matrice associate di $f$ e di $g$ sono le seguenti:

(i) $M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_W^*}(f) = M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_W^*}(i^\top \circ a_\varphi) = \underbrace{M^{\mathcal{B}_V^*}_{\mathcal{B}_W^*}(i^\top)}_{A}\,\underbrace{M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V^*}(a_\varphi)}_{B} = AB,$

(ii) $M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V^*}(g) = M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V^*}(a_\varphi \circ i) = \underbrace{M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V^*}(a_\varphi)}_{B}\,\underbrace{M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V}(i)}_{A^\top} = BA^\top \overbrace{=}^{B^\top = B} (AB)^\top.$

Poiché $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^\top)$, si deduce che $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(g) \implies \operatorname{rg}(i^\top \circ a_\varphi) = \operatorname{rg}(a_\varphi \circ i) = \operatorname{rg}(a_\varphi|_W) = \dim W - \dim \operatorname{Ker} a_\varphi|_W = \dim W - \dim(W \cap$

$\underbrace{\operatorname{Ker} a_\varphi}_{V^\perp}) = \dim W - \dim(W \cap V^\perp)$. Si conclude allora, sostituendo quest'ultima identità nell'identità ricavata a inizio dimostrazione che $\dim V = \dim W^\top + \dim W - \dim(W \cap V^\perp)$, ossia la tesi. $\square$

**Osservazione.** Si possono fare alcune osservazioni sul radicale di un solo elemento $\underline{w}$ e su quello del suo sottospazio generato $W = \operatorname{Span}(\underline{w})$:

- $\underline{w}^\perp = W^\perp$,
- $\underline{w} \notin W^\perp \iff \operatorname{Rad}(\varphi|_W) = W \cap W^\perp \iff \underline{w}$ non è isotropo $= \{\underline{0}\} \iff V = W \oplus W^\perp$.

**Definizione.** Si definisce **base ortogonale** di $V$ una base $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_n}$ tale per cui $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = 0 \impliedby i \neq j$, ossia per cui la matrice associata del prodotto scalare è diagonale.

**Proposizione.** Se $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$, un prodotto scalare è univocamente determinato dalla sua forma quadratica $q$.

*Dimostrazione.* Si nota infatti che $q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = 2\varphi(\underline{v}, \underline{w})$, e quindi, poiché 2 è invertibile per ipotesi, che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 2^{-1}(q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}))$. $\square$

**Teorema.** (di Lagrange) Ogni spazio vettoriale $V$ su $\mathbb{K}$ tale per cui $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$ ammette una base ortogonale.

*Dimostrazione.* Sia dimostra il teorema per induzione su $n := \dim V$. Per $n \leq 1$, la dimostrazione è triviale. Sia allora il teorema vero per $i \leq n$. Se $V$ ammette un vettore non isotropo $\underline{w}$, sia $W = \operatorname{Span}(\underline{w})$ e si consideri la decomposizione $V = W \oplus W^\perp$. Poiché $W^\perp$ ha dimensione $n - 1$, per ipotesi induttiva ammette una base ortogonale. Inoltre, tale base è anche ortogonale a $W$, e quindi l'aggiunta di $\underline{w}$ a questa base ne fa una base ortogonale di $V$. Se invece $V$ non ammette vettori non isotropi, ogni forma quadratica è nulla, e quindi il prodotto scalare è nullo per la proposizione precedente. $\square$