

Chiusura algebrica di un campo e campi di spezzamento

di Gabriel Antonio Videtta

Nota. Per K , L ed F si intenderanno sempre dei campi. Se non espressamente detto, si sottintenderà anche che $K \subseteq L$, F , e che L ed F sono estensioni costruite su K . Per $[L : K]$ si intenderà $\dim_K L$, ossia la dimensione di L come K -spazio vettoriale.

Questo documento si propone di illustrare le principali proprietà e caratteristiche dei campi algebricamente chiusi, delle chiusure algebriche e dei campi di spezzamento, col proposito di dare i mezzi necessari per approcciarsi alla teoria di Galois. Per questo motivo si presentano le seguenti definizioni:

Definizione (campo algebricamente chiuso). Un campo K si dice **algebricamente chiuso** se ogni polinomio a coefficienti in K ammette una radice in K . Equivalentemente, K è algebricamente chiuso se ogni polinomio $p \in K[x]$ ha tutte le proprie radici in K , e quindi se gli irriducibili di K sono tutti e soli i polinomi di grado unitario.

Definizione (chiusura algebrica). Un'estensione Ω/K si dice **chiusura algebrica** di K , e si indica usualmente con \overline{K} , se Ω è un campo algebricamente chiuso e se Ω è un'estensione algebrica su K .

Osservazione. Per esempio, una chiusura algebrica di \mathbb{R} è \mathbb{C} , per il Teorema fondamentale dell'algebra.

Proposizione. Sia Ω un campo algebricamente chiuso. Se allora K è un sottocampo di Ω , vale che K' , il campo degli elementi algebrici su K , è una chiusura algebrica di K .

Dimostrazione. Chiaramente K' è un'estensione algebrica su K . Si verifica allora che K' è algebricamente chiuso. Sia $p \in K'[x]$. Dal momento che K è algebricamente chiuso, e che p appartiene anche a $K[x]$, allora p ammette una radice $\alpha \in \Omega$. Si mostra che α è algebrico su K . Poiché allora $K'(\alpha)/K'$ è un'estensione algebrica (infatti p annulla α per ipotesi) e K'/K è algebrica per ipotesi, allora $K'(\alpha)$ è algebrica su K , e dunque α è algebrico su K , pertanto $\alpha \in K'$, da cui la tesi. \square

Osservazione. Poiché \mathbb{Q} è un sottocampo di \mathbb{C} e \mathbb{C} è un campo algebricamente chiuso, il campo degli elementi algebrici di \mathbb{Q} è una chiusura algebrica di \mathbb{Q} per la proposizione precedente.

Adesso si enuncia, senza dimostrarlo, un teorema su cui si baserà buona parte della prossima teoria:

Teorema (esistenza ed unicità della chiusura algebrica). Esiste ed è unica, a meno di K -isomorfismo¹, la chiusura algebrica di K .

Osservazione. Poiché il campo degli elementi algebrici di \mathbb{Q} è una chiusura algebrica di \mathbb{Q} ed è un insieme numerabile, \mathbb{C} non può essere una chiusura algebrica di \mathbb{Q} dacché \mathbb{C} ha la cardinalità del continuo (e dunque non possono esistere biezioni tra \mathbb{C} e $\overline{\mathbb{Q}}$). Poiché \mathbb{C} è però algebricamente chiuso, può solamente verificarsi che \mathbb{C} non sia un'estensione algebrica di \mathbb{Q} . Più facilmente, $\pi \in \mathbb{R}$ non è algebrico su \mathbb{Q} , e così né \mathbb{R} né \mathbb{C} sono estensioni algebriche su \mathbb{Q} .

Definizione (campo di spezzamento). Sia \mathcal{F} una famiglia di polinomi di $K[x]$. Si definisce allora **campo di spezzamento** di \mathcal{F} una estensione F di K tale per cui:

- ogni $p \in \mathcal{F}$ si decompone in fattori lineari in $F[x]$,
- se L è un'estensione su K tale per cui $L \subsetneq F$, allora esiste $p \in \mathcal{F}$ non si decompone in fattori lineari in $L[x]$.

Equivalentemente F è un'estensione minimale in cui ogni polinomio di \mathcal{F} si decompone in fattori lineari.

Come per le chiusure algebriche, si enuncia il seguente teorema senza dimostrazione²:

Teorema (esistenza ed unicità del campo di spezzamento). Esiste ed è unico, a meno di K -isomorfismo, il campo di spezzamento di \mathcal{F} su K .

Definizione (coniugati di α). Se $\alpha \in L/K$ è algebrico su K , si definiscono **coniugati** di α su K le radici di μ_α su K .

I coniugati di α sono speciali in quanto permettono di studiare le K -immersioni di $K(\alpha)$ in \overline{K} , ossia di studiare i campi K -isomorfi a $K(\alpha)$ presenti in \overline{K} , come dimostra la:

Proposizione. Sia $\alpha \in L/K$ algebrico su K . Allora, se d è il numero di coniugati distinti di α , esistono esattamente d K -immersioni di $K(\alpha)$ in \overline{K} e sono tali da mandare α in un suo altro coniugato.

¹Un K -isomorfismo è un isomorfismo tra estensioni di K che fissa K , ossia che ristretto a K è l'identità di K .

²L'esistenza di un campo di spezzamento è piuttosto facile da dimostrare, è sufficiente considerare l'estensione di K a cui si aggiungono tutte le radici del polinomio.

Dimostrazione. Per considerare le K -immersioni di $K(\alpha)$ in K , si considera prima l'isomorfismo:

$$K(\alpha) \cong K[x]/(\mu_\alpha).$$

Per il Primo teorema di isomorfismo, esistono allora tanti omomorfismi da $K(\alpha)$ in \overline{K} quanti sono gli omomorfismi da $K[x]$ in \overline{K} che annullano (μ_α) . Un omomorfismo φ da $K[x]$ a \overline{K} che fissa K è completamente determinato da $\beta = \varphi(x)$ ed in particolare mappa $p \in K[x]$ a $p(\beta)$. Affinché allora (μ_α) appartenga a $\text{Ker } \varphi$, $\mu_\alpha(\beta) = 0$, e quindi β deve essere un coniugato di α . Pertanto gli omomorfismi da $K(\alpha)$ a \overline{K} sono tali per cui α venga mandato in β . Questi sono K -immersioni dal momento che l'unità viene preservata, da cui la tesi. \square

Definizione (estensione separabile). Un'estensione L/K si dice **separabile** se per ogni $\alpha \in L$, $\mu_{\alpha,K}$ ha radici distinte.

Definizione (campo perfetto). Un campo si dice **perfetto** se le derivate dei suoi polinomi irriducibili non sono mai nulle. Equivalentemente un campo è perfetto se i suoi polinomi irriducibili hanno sempre radici distinte.

Osservazione. Le estensioni di un campo perfetto sono sempre separabili. Infatti il polinomio minimo su K è in particolare un irriducibile, e quindi ha radici distinte.

Nota. Si assumerà d'ora in poi che K è perfetto, in modo tale da semplificare l'introduzione alla teoria di Galois.

Osservazione. Poiché K è perfetto, le K -immersioni di $K(\alpha)$ sono esattamente $[K(\alpha) : K] = \deg_K \alpha$.