Gruppi liberi e presentazioni

di Gabriel Antonio Videtta

Nota. Nel corso del documento con G un qualsiasi gruppo.

Si definisce il **gruppo libero** su n generatori il gruppo F_n tale per cui:

$$F_n = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \{x_{i_1}^{\pm 1} \cdots x_{i_k}^{\pm 1} \mid i_j \in \{1, \ldots, n\}\}/\sim,$$

dove[1] $a \sim b$ se e solo se sostituendo i vari $x_i x_i^{-1}$ o $x_i^{-1} x_i$ si ottengono le stesse scritture in funzione dei simboli x_1, ..., x_n. L'operazione di questo gruppo è la concatenazione (ossia il prodotto tra x_i e x_j è per definizione $x_i x_j$) e la stringa vuota è per definizione l'identità, indicata con e. Per convenzione si denota $x \cdots x$ ripetuto k volte come x^k e si pone $x^{-k} := (x^{-1})^k$, facendo valere le usuali proprietà delle potenze.

In generale, dato un insieme S, si definisce il gruppo libero $F(S)$ come il gruppo libero ottenuto dalle scritture finite di S a meno di equivalenza per $\sim$. Se S è finito e $|S| = n$, allora $F(S) \cong F_n$, dove l'isomorfismo è costruito mandando ordinatamente i generatori di $F(S)$ in $x_1, \ldots, x_n$.

Per i gruppi liberi vale la **proprietà universale**, ossia $\mathrm{Hom}(F_n, G)$ è in bigezione con G^n tramite la mappa che associa un omomorfismo φ alla n-upla $(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$, la cui inversa associa una n-upla $(g_1, \ldots, g_n)$ ad un unico omomorfismo tale per cui $\varphi(x_i) = g_i$. Questi gruppi, infatti, non presentano alcuna relazione tra i propri generatori, e dunque gli omomorfismi presentati sono sempre ben definiti.

Si dice che un gruppo G ammette una **presentazione** se esiste un insieme S di generatori di G e un sottoinsieme R di $F(S)$ tale per cui:

$$G \cong F(S)/N,$$

dove N è il più piccolo sottogruppo normale di $F(S)$ contenente R (ossia la *chiusura normale* di R). In particolare G ammette una **presentazione finita** se S e R sono finiti.

Se G ammette una presentazione, allora esiste un omomorfismo surgettivo $\varphi : F(S) \to G$ tale per cui φ ristretto a S sia l'identità[2] e per cui $\operatorname{Ker} \varphi = N$.

[1] Chiaramente la relazione $\sim$ è di equivalenza.

[2] A livello astratto S in $F(S)$ è solo una scrittura simbolica, quello che si intende è che si associa al simbolo $s \in S$ l'effettivo elemento s in G.

In tal caso, è decisamente più facile descrivere gli omomorfismi da G a un qualsiasi altro gruppo H. Infatti, poiché $G \cong F(S)/N$, esiste una bigezione, secondo il Primo teorema di omomorfismo, tra $\mathrm{Hom}(G, H)$ e gli omomorfismi di $\mathrm{Hom}(F(S), H)$ tali per cui N sia contenuto nel nucleo; affinché N sia contenuto nel nucleo è però sufficiente vi sia contenuto R, dacché N è la chiusura normale di R. Pertanto R rappresenta in un certo senso un insieme di "relazioni tra i generatori" che devono essere rispettate affinché l'omomorfismo sia ben definito. Si scrive allora la presentazione di G come:

$$G \cong F(S)/N = \langle S \mid R \rangle.$$

Talvolta per R si scrive un insieme di identità $a_1 = b_1$, sottintendendo che $a_1 b_1^{-1} \in R$.

Esempio. Si illustrano le presentazioni dei gruppi più importanti:

- $\mathbb{Z} \cong \langle x \rangle$,
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \langle x \mid x^n \rangle$,
- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \langle x, y \mid x^2, y^2, [x, y] \rangle$,
- $D_n \cong \langle r, s \mid r^n, s^2, (sr)^2 \rangle$.