Note del corso di Analisi matematica 1

Gabriel Antonio Videtta

23, 24 e 28 marzo 2023

Questo avviso sta ad indicare che questo documento è ancora una bozza e non è da intendersi né completo, né revisionato.

Proprietà principali della continuità e dei limiti di funzione

Nota. Nel corso del documento, per un insieme X, qualora non specificato, si intenderà sempre un sottoinsieme generico dell'insieme dei numeri reali esteso $\overline{\mathbb{R}}$. Analogamente per f si intenderà sempre una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Proposizione. Dati $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\overline{x}$ punto di accumulazione di X tale che $\forall\,(x_n) \subseteq X \setminus \{\overline{x}\} \mid x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$ vale che $f(x_n)$ converge. Allora il limite di $f(x_n)$ è sempre lo stesso, indipendentemente dalla scelta di (x_n).

Dimostrazione. Siano per assurdo $(x_n), (y_n) \subseteq X \setminus \{\overline{x}\}$ due successioni tali che $x_n, y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$ e che $f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} L$ e $f(y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} G$ con $L \neq G$. Si costruisce allora la successione $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X \setminus \{\overline{x}\}$ nel seguente modo:

$$z_n = \begin{cases} x_n & \text{se } n \text{ è pari,} \\ y_n & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

ossia unendo le due successioni (x_n) e (y_n) in modo tale che agli indici pari corrispondano gli elementi di x_{2n} e a quelli dispari quelli di y_{2n+1}.

Si mostra che $z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$. Sia I un intorno di $\overline{x}$. Allora, dal momento che le due sottosuccessioni $(x_{2n}), (y_{2n+1}) \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$, esistono sicuramente due $n_x, n_y \in \mathbb{N}$ tali che $n \geq n_x \implies x_{2n} \in I$ e $n \geq n_y \implies y_{2n+1} \in I$. Pertanto, detto $n_k = \max\{n_x, n_y\}$, $n \geq n_k \implies x_{2n}, y_{2n+1} \in I$, ossia che per $n \geq 2n_k$, $z_n \in I$. Si conclude allora che $(z_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$.

Tuttavia $f(z_n)$ non può convergere a nessun limite, dal momento che le due sottosuccessioni $f(x_{2n})$ e $f(y_{2n+1})$ convergono per ipotesi a valori distinti ed il limite deve essere unico. L'esistenza di tale successione contraddice allora l'ipotesi, $\lightning$. $\square$

Proposizione. Data $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$, sia $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che $f(n) := x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Allora $f(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} L \iff x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} L$.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

($\implies$) Sia I un intorno di L. Allora, poiché $f(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} L$, esiste un intorno $J = [a, \infty]$ tale che $f(J \cap \mathbb{N} \setminus \{\infty\}) \subseteq I$. Poiché ∞ è un punto di accumulazione di $\mathbb{N}$, $A = J \cap \mathbb{N} \setminus \{\infty\}$ non è mai vuoto. Inoltre, poiché $A \subseteq \mathbb{N}$, A ammette un minimo[1], detto m. Vale in particolare che $f(n) \in I$, $\forall\, n \geq m$, e quindi che $x_n \in I$, ossia che $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} L$.

($\impliedby$) Sia I un intorno di L. Dal momento che $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} L$, $\exists\, n_k \in \mathbb{N} \mid n \geq n_k \implies x_n \in I$. Allora, detto $J = [n_k, \infty]$, vale che $f(J \cap \mathbb{N} \setminus \{\infty\}) \subseteq I$, ossia che $f(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} L$. $\square$

Proposizione. Siano $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\overline{x} \in X$ punto di accumulazione di X. Allora sono fatti equivalenti i seguenti:

(i) $f(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} f(\overline{x})$,

(ii) f è continua in $\overline{x}$.

Dimostrazione. Sia I un intorno di $f(\overline{x})$. Dal momento che $\overline{x}$ è un punto di accumulazione, si ricava allora da entrambe le ipotesi che esiste un intorno J di $\overline{x}$ tale che $f(J \cap X \setminus \{\overline{x}\}) \subseteq I$, e quindi, per definizione, la tesi. $\square$

Osservazione. Se $\overline{x}$ è un punto isolato di X, allora f è continua in $\overline{x}$. Pertanto per rendere la proposizione precedente vera, è necessario ipotizzare che $\overline{x}$ sia un punto di accumulazione (infatti il limite in un punto isolato non esiste per definizione).

Proposizione. Siano $f : X \to \mathbb{R}$ e $\overline{x}$ punto di accumulazione di X. Siano $L \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\tilde{f} : X \cup \{\overline{x}\} \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che[2]:

[1] Non è in realtà necessario che si consideri il minimo di tale insieme, occorre semplicemente che A sia non vuoto e che sia infinito.

[2] Tale costruzione si chiama **estensione continua** di f, nel caso in cui L sia proprio $\lim_{x \to \overline{x}} f(x)$.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} L & \text{se } x = \overline{x}, \\ f(x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora $f(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} L \iff \tilde{f}$ è continua in $\overline{x}$.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

($\implies$) Sia I un intorno di L. Si ricava allora dalle ipotesi che esiste sempre un intorno J di $\overline{x}$ tale che $f(\underbrace{J \cap X \setminus \{\overline{x}\}}_{A}) \subseteq I$. Dal momento che $\overline{x} \notin A$, si deduce che $f(J \cap X \setminus \{\overline{x}\}) = \tilde{f}(J \cap X \setminus \{\overline{x}\}) \subseteq I$, ossia che $\tilde{f}$ è continua in $\overline{x}$.

($\impliedby$) Sia I un intorno di L. Poiché $\tilde{f}$ è continua in $\overline{x}$, esiste un intorno J di $\overline{x}$ tale che $\tilde{f}(\underbrace{J \cap (X \cup \{\overline{x}\}) \setminus \{\overline{x}\}}_{A}) \subseteq I$. Poiché $\overline{x} \notin A$ e $\overline{x}$ è punto di accumulazione, si deduce che $I \supseteq \tilde{f}(J \cap (X \cup \{\overline{x}\}) \setminus \{\overline{x}\}) = f(J \cap (X \cup \{\overline{x}\}) \setminus \{\overline{x}\}) \supseteq f(J \cap X \setminus \{\overline{x}\})$, e quindi che $f(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} L$. $\square$

Osservazione. Tutte le funzioni elementari (e.g. $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\exp(x)$, $\ln(x)$, $|x|$, x^a) sono funzioni continue nel loro insieme di definizione[3].

Proposizione. Siano $f : X \to Y \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ e sia $\overline{x} \in X$. Sia f continua in $\overline{x}$ e sia g continua in $f(\overline{x})$. Allora $g \circ f$ è continua in $\overline{x}$.

Dimostrazione. Sia I un intorno di $z = g(f(\overline{x}))$. Allora, poiché g è continua in $f(\overline{x})$, $\exists\, J$ intorno di $f(\overline{x}) \mid g(J \cap Y \setminus \{f(\overline{x})\}) \subseteq I$. Tuttavia, poiché f è continua in $\overline{x}$, $\exists\, K$ intorno di $\overline{x} \mid f(K \cap X \setminus \{\overline{x}\}) \subseteq J$, da cui si conclude che $g(f(K \cap X \setminus \{\overline{x}\})) \subseteq I$, dacché $\forall\, x \in K \cap X \setminus \{\overline{x}\}$, o $f(x) = f(\overline{x})$, e quindi $g(f(x)) = z$ chiaramente appartiene a I, o altrimenti $f(x) \in J \cap Y \setminus \{f(\overline{x})\} \implies g(f(x)) \in g(J \cap Y \setminus \{f(\overline{x})\}) \subseteq I$, da cui la tesi. $\square$

Teorema. (di sostituzione nel limite) Sia $f : X \to Y \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, sia $\overline{x}$ punto di accumulazione di X tale che $f(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} \overline{y}$. Se $\overline{y}$ è un punto di accumulazione di Y e $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ è tale che $\overline{y} \in Y \implies g$ continua in $\overline{y}$ e $g(y) \xrightarrow[y \to \overline{y}]{} \overline{z}$, allora $g(f(x)) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} \overline{z}$.

[3] Tale fatto è una mera conseguenza della derivabilità delle funzioni elementari nel proprio insieme di definizione.

Dimostrazione. Siano $\tilde{f} : X \cup \{\overline{x}\}$, $\tilde{g} : Y \cup \{\overline{y}\}$ due funzioni costruite nel seguente modo:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \overline{y} & \text{se } x = \overline{x}, \\ f(x) & \text{altrimenti}, \end{cases} \qquad \tilde{g}(y) = \begin{cases} \overline{z} & \text{se } y = \overline{y}, \\ g(y) & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Poiché $f(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} \overline{y}$ e $\overline{x}$ è un punto di accumulazione di X, per una proposizione precedente, $\tilde{f}$ è continua in $\overline{x}$. Analogamente $\tilde{g}$ è continua in $\overline{y}$. Dal momento che vale che $\tilde{f}(\overline{x}) = \overline{y}$, per la proposizione precedente $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ è continua in $\overline{x}$, e dunque $\lim_{x \to \overline{x}} \tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \tilde{g}(\tilde{f}(\overline{x})) = \overline{z}$.

Si consideri adesso la funzione $\widetilde{g \circ f} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definita nel seguente modo:

$$\widetilde{g \circ f}(x) = \begin{cases} \overline{z} & \text{se } x = \overline{x}, \\ g(f(x)) & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Si mostra che $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$. Se $x = \overline{x}$, chiaramente $\widetilde{g \circ f}(x) = \overline{z} = \tilde{g}(\tilde{f}(\overline{x}))$. Se $x \neq \overline{x}$, si considera il caso in cui $\tilde{f}(x) = f(x)$ è uguale a $\overline{y}$ ed il caso in cui non vi è uguale.

Se $\tilde{f}(x) \neq \overline{y}$, $\tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \tilde{g}(f(x)) \overbrace{=}^{f(x) \neq \overline{y}} g(f(x)) = \widetilde{g \circ f}(x)$. Se invece $\tilde{f}(x) = \overline{y}$, $\overline{y} \in Y$, e quindi g è continua in $\overline{y}$, da cui necessariamente deriva che $g(\overline{y}) = \overline{z}$. Allora $\widetilde{g \circ f}(x) = g(f(x)) = g(\overline{y}) = \overline{z} = \tilde{g}(\tilde{f}(\overline{x}))$.

Si conclude allora che $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$, e quindi che $\widetilde{g \circ f}$ è continua in $\overline{x}$. Pertanto, dalla proposizione precedente, $g(f(x)) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} \overline{z}$. $\square$

Esercizio 1. Si mostri che tutte le ipotesi della proposizione precedente sono necessarie, fornendo un controesempio.

Soluzione. Chiaramente $\overline{x}$ e $\overline{y}$ devono essere punti di accumulazione dei propri insiemi di appartenenza, altrimenti non sarebbe possibile calcolarne il limite.

Inoltre, se $\overline{y} \in Y$ è necessario che g sia anche continua in $\overline{y}$ (nella dimostrazione della proposizione si è infatti utilizzato il fatto che $g(\overline{y}) = \overline{z}$). Se così non dovesse essere, si potrebbero definire due funzioni f e g in modo tale che:

$$f(x) = 0, \qquad g(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y = 0, \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si osserva subito che $g(y)$ non è continua in 0. Inoltre $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ e $g(y) \xrightarrow[y \to 0]{} 1$. Tuttavia $g(f(x)) = g(0) = 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \neq 1$, da cui il controesempio.

Proposizione. Date $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ continue in $\overline{x}$. Allora:

(i) $f_1 + f_2$ è continua in $\overline{x}$,

(ii) $f_1 f_2$ è continua in $\overline{x}$.

Dimostrazione. Si dimostrano i due punti separatamente.

(i) Sia $f := f_1 + f_2$. Poiché f_1, f_2 sono continue in $\overline{x}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \mid |x - \overline{x}| < \delta \implies |f_1(x) - f_1(\overline{x})|,\ |f_2(x) - f_2(\overline{x})| \leq \varepsilon$ (per ogni $\varepsilon > 0$, è infatti sufficiente considerare $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, ossia il minimo delle semilunghezze degli intorni di $\overline{x}$ rispetto a f_1 ed f_2). Allora, per la disuguaglianza triangolare, $|f(x) - f(\overline{x})| \leq |f_1(x) - f_1(\overline{x})| + |f_2(x) - f_2(\overline{x})| \leq 2\varepsilon$. Si ricava dunque che $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \mid |f(x) - f(\overline{x})| \leq 2\varepsilon$, e quindi, poiché $2\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0$, si conclude anche che f è continua in $\overline{x}$.

(ii) Dal momento che f_1, f_2 sono continue in $\overline{x}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che $|x - \overline{x}| < \delta \implies |f_1(x) - f_1(\overline{x})|,\ |f_2(x) - f_2(\overline{x})| < \varepsilon$ (vale lo stesso ragionamento del punto precedente). Allora $f_1(x) = f_1(\overline{x}) + e_1$ e $f_2(x) = f_2(\overline{x}) + e_2$, con $|e_1|, |e_2| < \varepsilon$ e $|x - \overline{x}| < \delta$. Dunque $f_1(x)f_2(x) = f_1(\overline{x})f_2(\overline{x}) + \underbrace{e_1 f_2(\overline{x}) + e_2 f_1(\overline{x}) + e_1 e_2}_{e}$. In particolare, per la disuguaglianza triangolare, $|e| \leq |e_1 f_2(\overline{x})| + |e_2 f_1(\overline{x})| + |e_1 e_2| \leq \underbrace{\varepsilon\,|f_2(\overline{x})| + \varepsilon\,|f_1(\overline{x})| + \varepsilon^2}_{\varepsilon'}$. Poiché $\varepsilon' \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0$, si ricava che $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \mid |x - \overline{x}| < \delta \implies |f_1(x)f_2(x) - f_1(\overline{x})f_2(\overline{x})| = |e| \leq \varepsilon'$, ossia si conclude che $f_1 f_2$ è continua in $\overline{x}$.

$\square$

Proposizione. Date $f_1, f_2 : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\overline{x}$ punto di accumulazione di X. Se $\lim_{x \to \overline{x}} f_1(x) = L_1 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to \overline{x}} f_2(x) = L_2 \in \mathbb{R}$, allora valgono i seguenti risultati:

(i) $f_1(x) + f_2(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} L_1 + L_2$,

(ii) $f_1(x)f_2(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} L_1L_2$.

Dimostrazione. Si definiscono preliminarmente le funzioni $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : X \cup \{\overline{x}\} \to \overline{\mathbb{R}}$ in modo tale che:

$$\tilde{f}_1(x) = \begin{cases} L_1 & \text{se } x = \overline{x}, \\ f_1(x) & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad \tilde{f}_2(x) = \begin{cases} L_2 & \text{se } x = \overline{x}, \\ f_2(x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si dimostrano ora i due risultati separatamente.

(i) Si definisce $\widetilde{f_1 + f_2} : X \cup \{\overline{x}\} \to \overline{\mathbb{R}}$ nel seguente modo:

$$\widetilde{f_1 + f_2}(x) = \begin{cases} L_1 + L_2 & \text{se } x = \overline{x}, \\ f_1(x) + f_2(x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si osserva che la somma $L_1 + L_2$ è ben definita dacché sia L_1 che L_2 sono elementi di $\mathbb{R}$. Poiché da una proposizione precedente $\tilde{f}_1$ e $\tilde{f}_2$ sono continue in $\overline{x}$, $\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$ è continua anch'essa in $\overline{x}$. È sufficiente allora dimostrare che $\widetilde{f_1 + f_2} = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$. Se $x \neq \overline{x}$, $\widetilde{f_1 + f_2}(x) = f_1(x) + f_2(x) = \tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_2(x) = (\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2)(x)$. Se invece $x = \overline{x}$, $\widetilde{f_1 + f_2}(x) = L_1 + L_2 = \tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_2(x) = (\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2)(x)$. Quindi $\widetilde{f_1 + f_2} = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$, e dunque si conclude che $\widetilde{f_1 + f_2}$ è continua in $\overline{x}$, ossia che $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} L_1 + L_2$.

(ii) Si definisce, analogamente a prima, $\widetilde{f_1 f_2} : X \cup \{\overline{x}\} \to \overline{\mathbb{R}}$ nel seguente modo:

$$\widetilde{f_1 f_2}(x) = \begin{cases} L_1 L_2 & \text{se } x = \overline{x}, \\ f_1(x) f_2(x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Come prima, si osserva che il prodotto L_1L_2 è ben definito dacché sia L_1 che L_2 sono elementi di $\mathbb{R}$. Poiché da una proposizione precedente $\tilde{f}_1$ e $\tilde{f}_2$ sono continue in $\overline{x}$, $\tilde{f}_1\tilde{f}_2$ è continua anch'essa in $\overline{x}$. È sufficiente allora dimostrare che $\widetilde{f_1 f_2} = \tilde{f}_1\tilde{f}_2$. Se $x \neq \overline{x}$, $\widetilde{f_1 f_2}(x) = f_1(x)f_2(x) = \tilde{f}_1(x)\tilde{f}_2(x) = (\tilde{f}_1\tilde{f}_2)(x)$. Se invece $x = \overline{x}$,

$\widetilde{f_1 f_2}(x) = L_1 L_2 = \tilde{f}_1(x)\tilde{f}_2(x) = (\tilde{f}_1\tilde{f}_2)(x)$. Quindi $\widetilde{f_1 f_2} = \tilde{f}_1\tilde{f}_2$, da cui si conclude che $\widetilde{f_1 f_2}$ è anch'essa continua in $\overline{x}$, ossia che $(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x) \xrightarrow[x \to \overline{x}]{} L_1 L_2$.

□

Definizione. (intorno destro e sinistro) Se $\overline{x} \in \mathbb{R}$, si dicono **intorni destri** di $\overline{x}$ gli intervalli della forma $[\overline{x}, \overline{x}+\varepsilon]$ con $\varepsilon > 0$. Analogamente, gli **intorni sinistri** sono gli intervalli della forma $[\overline{x}-\varepsilon, \overline{x}]$.

Definizione. (punto di accumulazione destro e sinistro) Sia $\overline{x} \in X$. Si dice che $\overline{x}$ è un **punto di accumulazione destro** di X se $\forall\, I$ intorno destro di $\overline{x}$, $I \cap X \setminus \{\overline{x}\} \neq \varnothing$. Analogamente si dice **punto di accumulazione sinistro** di X se è tale per gli intorni sinistri.

Definizione. (limite destro e sinistro) Sia $\overline{x}$ un punto di accumulazione destro di X. Allora si dice che f ammette un **limite destro** L in $\overline{x}$, $\lim_{x\to\overline{x}^+} f(x) = L$, se e solo se $\forall\, I$ intorno di L, $\exists\, J$ intorno destro di $\overline{x}$ tale che $f(J \cap X \setminus \{\overline{x}\}) \subseteq I$. Analogamente si definisce il **limite sinistro**: $\lim_{x\to\overline{x}^-} f(x) = L \overset{\text{def}}{\iff} \forall\, I$ intorno di L, $\exists\, J$ intorno sinistro di $\overline{x}$ tale che $f(J \cap X \setminus \{\overline{x}\}) \subseteq I$.

Definizione. (continuità destra e sinistra) Sia $\overline{x} \in X$. Allora f è **continua a destra** in $\overline{x}$ se e solo se $\forall\, I$ intorno di $f(\overline{x})$, $\exists\, J$ intorno destro di $\overline{x}$ tale che $f(J \cap X \setminus \{\overline{x}\}) \subseteq I$. Analogamente si dice che f è **continua a sinistra** su $\overline{x}$ se e solo se $\forall\, I$ intorno di $f(\overline{x})$, $\exists\, J$ intorno sinistro di $\overline{x}$ tale che $f(J \cap X \setminus \{\overline{x}\}) \subseteq I$.

Osservazione. Vi sono chiaramente alcuni collegamenti tra la continuità destra e sinistra e la continuità classica, così come ve ne sono tra il limite destro e sinistro ed il limite classico.

▶ $\overline{x}$ punto di accumulazione destro o sinistro di $X \iff \overline{x}$ punto di accumulazione di X,
▶ $\overline{x}$ punto di accumulazione destro e sinistro di $X \implies \overline{x}$ punto di accumulazione di X (non è però per forza vero il contrario, è sufficiente considerare $(0, \infty)$, dove 0 è solo un punto di accumulazione destro),
▶ f è continua in $\overline{x} \iff f$ è continua sinistra e destra in $\overline{x}$,
▶ Se $\overline{x}$ è un punto di accumulazione destro e sinistro, $\lim_{x\to\overline{x}} f(x) = L \iff \lim_{x\to\overline{x}^+} f(x) = L$ e $\lim_{x\to\overline{x}^-} f(x) = L$,
▶ Se $\overline{x}$ è un punto di accumulazione solo destro, $\lim_{x\to\overline{x}} f(x) = L \iff$

$\lim_{x\to\overline{x}^+} f(x) = L$,
▶ Se $\overline{x}$ è un punto di accumulazione solo sinistro, $\lim_{x\to\overline{x}} f(x) = L \iff \lim_{x\to\overline{x}^-} f(x) = L$.

Proposizione. Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ monotona e sia $\overline{x}$ un punto di accumulazione destro di X. Allora esiste $\lim_{x\to\overline{x}^+} f(x)$. Analogamente esiste il limite sinistro se $\overline{x}$ è invece un punto di accumulazione sinistro di X.

Dimostrazione. Senza perdità di generalità, si assuma f crescente (per il caso decrescente è sufficiente considerare $g = -f$). Si consideri allora l'insieme:

$$E = \{f(x) \mid x > \overline{x} \text{ e } x \in X\}.$$

Si consideri adesso $L = \inf E$ e un suo intorno I. Se non esistesse $x > \overline{x}$ tale che $f(x) \in I$, $\sup I$ sarebbe un minorante di E maggiore[4] di L, $\lightning$. Quindi esiste $x > \overline{x} \mid f(x) \in I$, e dal momento che f è crescente, l'intorno destro J di $\overline{x}$ di raggio $x - \overline{x}$ sarebbe tale che $f(J \cap X \setminus \{\overline{x}\}) \subseteq I$, da cui la tesi. $\square$

Esempio. (funzione discontinua in ogni punto di $\mathbb{R}$) Si consideri la funzione[5] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

ossia la funzione indicatrice dell'insieme $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Si dimostra che f non è continua in nessun punto di $\mathbb{R}$. Sia infatti $\overline{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dal momento che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, $\overline{x}$ è un punto di accumulazione di $\mathbb{Q}$, e quindi esiste una successione $(x_n) \subseteq \mathbb{Q}$ tale che $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \overline{x}$. Se f fosse continua in $\overline{x}$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, ma per l'intorno $I = [0 - \frac{1}{2}, 0 + \frac{1}{2}]$ di 0 non esiste alcun n_k tale per cui $f(x_n) \in I \;\forall n \geq n_k$, dal momento che, per definizione di f, $f(x_n) = 1 \;\forall n \in \mathbb{N}$. Quindi f non è continua in nessun $\overline{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Sia ora $\overline{x} \in \mathbb{Q}$. $\overline{x}$ è un punto di accumulazione di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (si può infatti considerare la successione $(x_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ definita da $x_n = \overline{x} + \frac{\sqrt{2}}{n}$, che è tale che $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \overline{x}$). Analogamente a come visto prima, allora, per l'intorno $I = [1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}]$ di 1, $f(x_n) \notin I \;\forall n \in \mathbb{N}$, e quindi f non è continua neanche su $\overline{x} \in \mathbb{Q}$, ossia è discontinua ovunque.

[4] Infatti $f(x) \geq L$ dacché è L è un minorante di E, da cui $f(x) \notin I \implies f(x) > \sup I$.
[5] Tale funzione è detta *funzione di Dirichlet*, in onore al matematico tedesco Peter Dirichlet (1805 – 1859).

Esercizio 2. Mostrare[6] che l'insieme dei punti di discontinuità di una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ monotona è al più numerabile, dove I è un intervallo.

Soluzione. Si assuma f crescente, senza perdita di generalità (altrimenti è sufficiente considerare $g = -f$). Sia E l'insieme dei punti di discontinuità di f. $\forall\, \overline{x} \in E$, $\overline{x}$ è un punto di accumulazione destro e sinistro di I (infatti I è un intervallo), ed in particolare, per la proposizione precedente, esistono sempre il limite sinistro $L^-(\overline{x})$ ed il limite destro $L^+(\overline{x})$ in $\overline{x}$ (dal momento che f è monotona), e sono tali che[7] $L^+(\overline{x}) > L^-(\overline{x})$ (infatti sono sicuramente diversi, altrimenti f sarebbe continua in $\overline{x}$; inoltre f è crescente). Allora sia $f : E \to \mathbb{Q}$ tale che $\overline{x} \mapsto c$, dove $c \in \mathbb{Q}$ è un punto razionale in $(L^-(\overline{x}), L^+(\overline{x}))$ (tale c esiste sempre, per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). Inoltre[8], $x < y \implies L^+(x) \leq L^-(y)$, e quindi ogni intervallo da cui c è estratto è distinto al variare di $\overline{x} \in E$. Pertanto f è iniettiva, e vale che $|E| \leq |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$. Si conclude allora che E è al più numerabile.

Teorema. (della permanenza del segno) Data $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ tale che $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} L > 0$, allora (x_n) è strettamente positiva definitivamente. Analogamente, se $L < 0$, (x_n) è negativa definitivamente.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità si pone $L > 0$. Allora esiste sicuramente un intorno I di L tale che ogni suo elemento è positivo (e.g. $I = [\frac{L}{2}, \frac{3L}{2}]$, se $L \in \mathbb{R}$, altrimenti $[a, \infty]$ con $a > 0$ se $L = +\infty$). Dal momento che $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} L$, $\exists\, n_k \mid n \geq n_k \implies x_n \in I$, ossia, in particolare, $n \geq n_k \implies x_n > 0$, da cui la tesi. $\square$

Proposizione. Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ e sia $\overline{x}$ un punto di accumulazione di X. Se $\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = L > 0$, allora $\exists\, J$ intorno non vuoto di $\overline{x}$ tale che $f(x) > 0$ $\forall\, x \in J \cap X \setminus \{\overline{x}\}$.

Dimostrazione. Analogamente a come visto per il teorema del segno, si pone $L > 0$. Allora esiste sicuramente un intorno I di L tale che ogni suo elemento è positivo. Poiché $\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = L > 0$, deve esistere un intorno J di $\overline{x}$ tale che $f(J \cap X \setminus \{\overline{x}\}) \subseteq I$. In particolare, $J \cap X \setminus \{\overline{x}\}$ non è mai vuoto, dal momento che $\overline{x}$ è un punto di accumulazione di X, e vale che $f(x) > 0$

[6] La tesi altro non è che un caso particolare del cosiddetto *teorema di Froda*.

[7] Detti $A = \{f(x) \mid x < \overline{x} \text{ e } x \in X\}$ e $B = \{f(x) \mid x > \overline{x} \text{ e } x \in X\}$, vale che $L^-(\overline{x}) = \sup A$ e $L^+(\overline{x}) = \inf B$. Dal momento che f è crescente, vale che $B \geq A$. Se $\inf B < \sup A$, esisterebbe un $b \in B$ tale che $\sup A > b$, da cui ancora esisterebbe un $a \in A$ tale che $a > b$, $\lightning$. Quindi $\inf B = L^+(\overline{x}) \geq \sup A = L^-(\overline{x})$.

[8] Sia $C = \{f(a) \mid x < a < y\}$. Allora $L^+(x) = \inf C$ e $L^-(y) = \sup C$. Dal momento che $\sup C \geq \inf C$, deve allora valere anche che $L^+(x) \leq L^-(y)$.

$\forall\, x \in J \cap X \setminus \{\overline{x}\}$ (dal momento che $f(x) \in I$, che ha tutti elementi positivi), da cui la tesi. $\square$

Teorema. (degli zeri) Dati $I = [a, b]$ e $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ continua tale che $f(a)f(b) < 0$ (i.e. sono discordi), allora $\exists\, c \in (a, b) \mid f(c) = 0$.

Dimostrazione. Senza alcuna perdita di generalità si pone $f(a) < 0 < f(b)$ (il caso $f(a) > 0 > f(b)$ è infine dimostrato considerando $g(x) = -f(x)$). Si definisce allora l'insieme E in modo tale che:

$$E = \{a \in I \mid f(a) < 0\}.$$

Si osserva che $E \neq \varnothing$, dacché $a \in E$. Per la completezza dei numeri reali, E ammette un estremo superiore $\overline{x} := \sup E$. Sia $(x_n) \subseteq E$ una successione tale che $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$: poiché f è continua in $\overline{x}$, $\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = f(\overline{x}) \implies f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(\overline{x})$. Allora, poiché $f(x_n) < 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, $f(\overline{x}) \leq 0$ (se così non fosse $f(x_n)$ dovrebbe essere definitivamente positiva per il teorema della permanenza del segno, ma questo è assurdo dacché $x_n \in E\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, $\lightning$).

Sia ora $(y_n) \in I$ una successione tale che $y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$ e che $y_n > \overline{x}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ (questo è sempre possibile dal momento che $\overline{x} \neq b \impliedby f(\overline{x}) \leq 0$). Allora, poiché $y_n > \overline{x} = \sup E$, y_n non appartiene ad E, e quindi deve valere che $f(y_n) > 0$. Si conclude allora, per il teorema della permanenza del segno, che $f(\overline{x}) \geq 0$, e quindi che $f(\overline{x}) = 0$, da cui la tesi. $\square$

Dimostrazione alternativa. (metodo di bisezione per la ricerca degli zeri) Come prima, senza alcuna perdita di generalità, si pone $f(a) < 0 < f(b)$. Si ponga $x_0 = \frac{a+b}{2}$, $I_0 = (a, b)$. Se $f(x_0) = 0$, allora il teorema è dimostrato. Altrimenti, $f(x_0) > 0$ o $f(x_0) < 0$. Nel primo caso, si consideri $I_1 = (a, x_0)$, altrimenti si ponga $I_1 = (x_0, b)$. Si riapplichi allora l'algoritmo con $a := \inf I_1$ e $b := \sup I_1$, definendo la successione (x_n) e gli intervalli I_n per ogni passo n dell'algoritmo.

Se la successione (x_n) è finita, allora $\exists\, n \mid f(x_n) = 0$, e quindi il teorema è dimostrato. Altrimenti, si osservi che la successione degli intervalli è decrescente, e che $|I_n| = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$: allora, poiché $x_n \in I_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, (x_n) ammette limite. In particolare, $I_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \{c\}$, e quindi $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} c \in I_0$. Siano a_n, b_n le successioni tali che $I_n = (a_n, b_n)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Vale in particolare che $a_n, b_n \xrightarrow[n \to \infty]{} c$. Allora, per la continuità di f su (a, b), vale che $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(c)$ e che $\lim_{n \to \infty} f(b_n) = f(c)$: poiché ogni elemento di

(a_n) è per costruzione tale che $f(a_n) < 0$, deve valere che $f(x) \leq 0$ per il teorema della permanenza del segno; analogamente deve valere per costruzione di (b_n) che $f(c) \geq 0$. Si conclude allora che $f(c) = 0$, da cui la tesi. $\square$

Corollario. (dei valori intermedi) Dati $I = (a, b)$ e $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ continua, allora $y_1,\ y_2 \in f(I) \implies [y_1, y_2] \subseteq f(I)$ (ossia f assume tutti i valori compresi tra y_1 e y_2; e quindi $f(I)$ è un insieme convesso di $\mathbb{R}$).

Dimostrazione. Supponiamo $y_1 < y_2$: poiché $y_1,\ y_2$ appartengono già a $f(I)$, è sufficiente mostrare che anche ogni $y \in (y_1, y_2)$ appartiene a $f(I)$. Dal momento che $y_1,\ y_2 \in f(I)$, $\exists\, x_1,\ x_2 \in I \mid f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Si consideri allora $g : I \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che $g(x) = f(x) - y$. Allora $g(x_1) = y_1 - y < 0$, mentre $g(x_2) = y_2 - y > 0$. Pertanto, per il teorema degli zeri, $\exists\, \overline{x} \in (x_1, x_2) \mid g(\overline{x}) = 0 \implies f(\overline{x}) = y$. Si conclude allora che anche $y \in f(I)$, da cui la tesi. $\square$

Proposizione. Gli unici insiemi convessi di $\mathbb{R}$ sono gli intervalli.

Dimostrazione. La dimostrazione del fatto che gli intervalli siano convessi è banale. Si dimostra piuttosto che ogni insieme convesso di $\mathbb{R}$ è un intervallo. Sia A dunque un insieme convesso di $\mathbb{R}$, e si considerino $a := \inf A$ e $b := \sup A$. Sia $x \in (a, b)$. Se non esistesse un punto $c \in A$ tale che $a < c < x$, x sarebbe un estremo inferiore di A, $\lightning$. Pertanto tale punto c esiste. Analogamente si può dire per un punto $d \in A$ tale che $x < d < b$. Allora, poiché A è convesso, $[c, d] \subseteq A$, e in particolare $x \in A$. Pertanto vale che $(a, b) \subseteq A$. Poiché a e b sono, rispettivamente, estremo inferiore e superiore di A, non possono esistere altri punti non appartenenti a $[a, b]$, ma appartenenti ad A. Quindi A può variare a seconda dell'appartenenza o meno di questi estremi tra questi insiemi:

(i) $A = (a, b)$, se $a,\ b \notin A$,

(ii) $A = [a, b)$, se $a \in A$, ma $b \notin A$,

(iii) $A = (a, b]$, se $b \in A$, ma $a \notin A$,

(iv) $A = [a, b]$, se $a,\ b \in A$.

In ognuno di questi casi A è un intervallo, da cui la tesi. $\square$

Osservazione. Una delle principali conseguenze del teorema dei valori intermedi è allora che $f(I)$ stesso è un intervallo, dal momento che è un insieme convesso di $\mathbb{R}$.

Teorema. (di Weierstrass) Sia I un intervallo chiuso[9] e sia $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ continua. Allora esistono x_m e x_M punti di massimo e minimo assoluti.

Dimostrazione. Ci si limita a dimostrare l'esistenza del minimo, dacché l'esistenza del massimo segue dal considerare $g = -f$. Sia $m := \inf f(I)$. Esiste allora una successione $(y_n) \subseteq f(I)$ tale che $y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} m$. Poiché $y_n \in f(I)$, $\exists\, x_n \in I \mid y_n = f(x_n)$. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, $\exists\,(x_{n_k}) \subseteq I$ sottosuccessione convergente, ossia tale che $x_{n_k} \to \overline{x} \in \overline{\mathbb{R}}$. In particolare vale che $\overline{x} \in I$, dal momento che I è un intervallo chiuso. Per la continuità di f (in particolare in $\overline{x}$), allora $f(x_{n_k}) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(\overline{x})$. Essendo $f(x_{n_k})$ una sottosuccessione di (y_n), che è convergente, deve valere che $f(\overline{x}) = m$, ossia $m \in f(I)$, da cui si ricava che $f(I)$ ammette un minimo, ovvverosia la tesi. $\square$

Osservazione. In particolare, una conseguenza del teorema di Weierstrass è che, nel caso di I chiuso, considerando $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ continua, non solo $f(I)$ è un intervallo, ma è anche un intervallo chiuso.

Osservazione. (algoritmo di ricerca dei massimi e dei minimi) Sia $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ la funzione continua di cui si ricerca i massimi e i minimi. Si ipotizzi[10] di poter considerare $\tilde{f} : \overline{I} \to \overline{\mathbb{R}}$, ossia l'estensione continua di f. Allora, poiché $\tilde{f}$ è continua ed è definita su un intervallo chiuso, per Weierstrass ammette un massimo e un minimo. Preso per esempio il minimo, esso potrebbe essere un estremo di $\tilde{I}$, oppure un punto stazionario di f, o infine un punto dell'intervallo I in cui la funzione f non è derivabile. Analogamente l'algoritmo di ricerca funziona per i massimi di f.

[9] In realtà è sufficiente che I sia chiuso, ossia che contenga i suoi punti di accumulazione.

[10] Non è infatti sempre possibile considerarne un'estensione continua (e.g. $\sin(\frac{1}{x})$, il seno del topologo); ciò accade qualora non esista almeno uno dei limiti negli estremi dell'intervallo di I.