

Note del corso di Analisi Matematica 1

Gabriel Antonio Videtta

23, 24 e 28 marzo 2023

Proprietà principali della continuità e dei limiti di funzione

Nota. Nel corso del documento, per un insieme X , qualora non specificato, si intenderà sempre un sottoinsieme generico dell'insieme dei numeri reali esteso $\overline{\mathbb{R}}$. Analogamente per f si intenderà sempre una funzione $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Proposizione. Dati $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, \bar{x} punto di accumulazione di X tale che $\forall (x_n) \subseteq X \setminus \{\bar{x}\} \mid x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x}$ vale che $f(x_n)$ converge. Allora il limite di $f(x_n)$ è sempre lo stesso, indipendentemente dalla scelta di (x_n) .

Dimostrazione. Siano per assurdo $(x_n), (y_n) \subseteq X \setminus \{\bar{x}\}$ due successioni tali che $x_n, y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x}$ e che $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$ e $f(y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G$ con $L \neq G$. Si costruisce allora la successione $(z_n) \subseteq X \setminus \{\bar{x}\}$ nel seguente modo:

$$z_n = \begin{cases} x_{\frac{n}{2}} & \text{se } n \text{ è pari,} \\ y_{\frac{n-1}{2}} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

ossia unendo le due successioni (x_n) e (y_n) in modo tale che agli indici pari corrispondano gli elementi di x_n e a quelli dispari quelli di y_n .

Si mostra che $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x}$. Sia I un intorno di \bar{x} . Allora, dal momento che $(x_n), (y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x}$, esistono sicuramente due $n_x, n_y \in \mathbb{N}$ tali che $n \geq n_x \implies x_n \in I$ e $n \geq n_y \implies y_n \in I$. Pertanto, detto $n_k = \max\{n_x, n_y\}$, $n \geq n_k \implies x_n, y_n \in I$, ossia che per $n \geq 2n_k$, $z_n \in I$. Si conclude allora che $(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x}$.

Tuttavia $f(z_n)$ non può convergere a nessun limite, dal momento che le due sottosuccessioni $f(x_n)$ e $f(y_n)$ convergono a valori distinti ed il limite

deve essere unico. L'esistenza di tale successione contraddice allora l'ipotesi, \neq . \square

Proposizione. Data $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$, definisco $f : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tale che $f(n) := x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Allora $f(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L \iff x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L$.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

(\implies) Sia I un intorno di L . Allora, poiché $f(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L$, esiste un intorno $J = [a, \infty]$ tale che $f(J \cap \mathbb{N} \setminus \{\infty\}) \subseteq I$. Poiché ∞ è un punto di accumulazione di \mathbb{N} , $A = J \cap \mathbb{N} \setminus \{\infty\}$ non è mai vuoto. Inoltre, poiché $A \subseteq \mathbb{N}$, A ammette un minimo¹, detto m . Vale in particolare che $f(n) \in I$, $\forall n \geq m$, e quindi che $x_n \in I$, $\forall n \geq m$, ossia che $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L$.

(\impliedby) Sia I un intorno di L . Dal momento che $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L$, $\exists n_k \in \mathbb{N} \mid n \geq n_k \implies x_n \in I$. Allora, detto $J = [n_k, \infty]$, vale che $f(J \cap \mathbb{N} \setminus \{\infty\}) \subseteq I$, ossia che $f(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L$. \square

Proposizione. Siano $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\bar{x} \in X$ punto di accumulazione di X . Allora sono fatti equivalenti i seguenti:

- (i) $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow \bar{x}]{} f(\bar{x})$,
- (ii) f è continua in \bar{x} .

Dimostrazione. Sia I un intorno di $f(\bar{x})$. Dal momento che \bar{x} è un punto di accumulazione, si ricava allora da entrambe le ipotesi che esiste un intorno J di \bar{x} tale che $f(J \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \subseteq I$, e quindi, per definizione, la tesi. \square

Osservazione. Se \bar{x} è un punto isolato di X , allora f è continua in \bar{x} . Pertanto per rendere la proposizione precedente vera, è necessario ipotizzare che \bar{x} sia un punto di accumulazione (infatti il limite in un punto isolato non esiste per definizione, mentre in tale punto f è continua).

Proposizione. Siano $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e \bar{x} punto di accumulazione di X . Siano $L \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\tilde{f} : X \cup \{\bar{x}\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tale che²:

¹Non è in realtà necessario che si consideri il minimo di tale insieme, occorre semplicemente che A sia non vuoto.

²Tale costruzione si chiama **estensione continua** di f , nel caso in cui L sia proprio $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x)$.

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} L & \text{se } x = \bar{x}, \\ f(x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} L \iff \tilde{f}$ è continua in \bar{x} .

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

(\implies) Sia I un intorno di L . Si ricava allora dalle ipotesi che esiste sempre un intorno J di \bar{x} tale che $f(\underbrace{J \cap X \setminus \{\bar{x}\}}_A) \subseteq I$. Dal momento che $\bar{x} \notin A$, si

deduce che $f(J \cap X \setminus \{\bar{x}\}) = \tilde{f}(J \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \subseteq I$, ossia che \tilde{f} è continua in \bar{x} .

(\impliedby) Sia I un intorno di L . Poiché \tilde{f} è continua in \bar{x} , esiste un intorno J di \bar{x} tale che $\tilde{f}(\underbrace{J \cap (X \cup \{\bar{x}\}) \setminus \{\bar{x}\}}_A) \subseteq I$. Poiché $\bar{x} \notin A$ e \bar{x} è punto di

accumulazione, si deduce che $I \supseteq \tilde{f}(J \cap (X \cup \{\bar{x}\}) \setminus \{\bar{x}\}) = f(J \cap (X \cup \{\bar{x}\}) \setminus \{\bar{x}\}) \supseteq f(J \cap X \setminus \{\bar{x}\})$, e quindi che $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} L$. \square

Osservazione. Tutte le funzioni elementari (e.g. $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\exp(x)$, $\ln(x)$, $|x|$, x^a) sono funzioni continue nel loro insieme di definizione.

Proposizione. Siano $f : X \rightarrow Y \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $g : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e sia $\bar{x} \in X$. Sia f continua in \bar{x} e sia g continua in $f(\bar{x})$. Allora $g \circ f$ è continua in \bar{x} .

Dimostrazione. Sia I un intorno di $z = g(f(\bar{x}))$. Allora, poiché g è continua in $f(\bar{x})$, $\exists J$ intorno di $f(\bar{x}) \mid g(J \cap Y \setminus \{f(\bar{x})\}) \subseteq I$. Tuttavia, poiché f è continua in \bar{x} , $\exists K$ intorno di $\bar{x} \mid f(K \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \subseteq J$, da cui si conclude che $g(f(K \cap X \setminus \{\bar{x}\})) \subseteq I$, dacché $\forall x \in K \cap X \setminus \{\bar{x}\}$, o $f(x) = f(\bar{x})$, e quindi $g(f(x)) = z$ chiaramente appartiene a I , o altrimenti $f(x) \in J \cap Y \setminus \{f(\bar{x})\} \implies g(f(x)) \in g(J \cap Y \setminus \{f(\bar{x})\}) \subseteq I$. \square

Teorema. Sia $f : X \rightarrow Y \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, sia \bar{x} punto di accumulazione di X tale che $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} \bar{y}$. Se \bar{y} è un punto di accumulazione di Y e $g : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è tale che $\bar{y} \in Y \implies g$ continua in \bar{y} e $g(y) \xrightarrow{y \rightarrow \bar{y}} \bar{z}$, allora $g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} \bar{z}$.

Dimostrazione. Siano $\tilde{f} : X \cup \{\bar{x}\}$, $\tilde{g} : Y \cup \{\bar{y}\}$ due funzioni costruite nel seguente modo:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \bar{y} & \text{se } x = \bar{x}, \\ f(x) & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \tilde{g}(y) = \begin{cases} \bar{z} & \text{se } y = \bar{y}, \\ g(y) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Poiché $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} \bar{y}$ e \bar{x} è un punto di accumulazione di X , per una proposizione precedente, \tilde{f} è continua in \bar{x} . Analogamente \tilde{g} è continua in \bar{y} . Dal momento che vale che $\tilde{f}(\bar{x}) = \bar{y}$, per la proposizione precedente $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ è continua in \bar{x} , e dunque $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \tilde{g}(\tilde{f}(\bar{x})) = \bar{z}$.

Si consideri adesso la funzione $\widetilde{g \circ f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ definita nel seguente modo:

$$\widetilde{g \circ f}(x) = \begin{cases} \bar{z} & \text{se } x = \bar{x}, \\ g(f(x)) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si mostra che $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$. Se $x = \bar{x}$, chiaramente $\widetilde{g \circ f}(x) = \bar{z} = \tilde{g}(\tilde{f}(\bar{x}))$. Se $x \neq \bar{x}$, si considera il caso in cui $\tilde{f}(x) = f(x)$ è uguale a \bar{y} ed il caso in cui non vi è uguale.

Se $\tilde{f}(x) \neq \bar{y}$, $\tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \tilde{g}(f(x)) \stackrel{f(x) \neq \bar{y}}{=} g(f(x)) = \widetilde{g \circ f}(x)$. Se invece $\tilde{f}(x) = \bar{y}$, $\bar{y} \in Y$, e quindi \tilde{g} è continua in \bar{y} , da cui necessariamente deriva che $\tilde{g}(\bar{y}) = \bar{z}$. Allora $\widetilde{g \circ f}(x) = g(f(x)) = g(\bar{y}) = \bar{z} = \tilde{g}(\tilde{f}(\bar{x}))$.

Si conclude allora che $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$, e quindi che $\widetilde{g \circ f}$ è continua in \bar{x} . Pertanto, dalla proposizione precedente, $g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} \bar{z}$. \square

Esercizio 1. Mostrare che tutte le ipotesi della proposizione precedente sono necessarie, fornendo alcuni controesempi.

Proposizione. Date $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ continue in \bar{x} . Allora:

- (i) $f_1 + f_2$ è continua in \bar{x} ,
- (ii) $f_1 f_2$ è continua in \bar{x} .

Dimostrazione. Si dimostrano i due punti separatamente.

- (i) Sia $f := f_1 + f_2$. Poiché f_1, f_2 sono continue in \bar{x} , $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid |x - \bar{x}| < \delta \implies |f_1(x) - f_1(\bar{x})|, |f_2(x) - f_2(\bar{x})| \leq \varepsilon$ (per ogni $\varepsilon > 0$, si prende $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, ossia il minimo delle semilunghezze degli intorno di \bar{x}). Allora $|f(x) - f(\bar{x})| \leq |f_1(x) - f_1(\bar{x})| + |f_2(x) - f_2(\bar{x})| \leq 2\varepsilon$. Si conclude dunque che $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid |f(x) - f(\bar{x})| \leq 2\varepsilon$, e quindi, poiché $2\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, che f è continua in \bar{x} .

- (ii) Dal momento che f_1, f_2 sono continue in \bar{x} , $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che $|x - \bar{x}| < \delta \implies |f_1(x) - f_1(\bar{x})| < \varepsilon, |f_2(x) - f_2(\bar{x})| < \varepsilon$ (vale lo stesso ragionamento del punto (i)). Allora $f_1(x) = f_1(\bar{x}) + e_1$ e $f_2(x) = f_2(\bar{x}) + e_2$, con $|e_1|, |e_2| < \varepsilon$. Dunque $f_1(x)f_2(x) = f_1(\bar{x})f_2(\bar{x}) + \underbrace{e_1f_2(\bar{x}) + e_2f_1(\bar{x}) + e_1e_2}_e$. In particolare, per la disuguaglianza triangolare, $|e| \leq |e_1f_2(\bar{x})| + |e_2f_1(\bar{x})| + |e_1e_2| \leq \varepsilon |f_2(\bar{x})| + \varepsilon |f_1(\bar{x})| + \varepsilon^2$.
- Poiché $\varepsilon' \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0^+]{\quad} 0$, si conclude che $|f_1(x)f_2(x) - f_1(\bar{x})f_2(\bar{x})| = |e| \leq \varepsilon' \implies f_1(x)f_2(x)$ continua in \bar{x} .

□

Proposizione. Date $f_1, f_2 : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, \bar{x} punto di accumulazione di X . Se $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f_1(x) = L_1 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f_2(x) = L_2 \in \mathbb{R}$, allora valgono i seguenti risultati:

- (i) $f_1(x) + f_2(x) \xrightarrow[x \rightarrow \bar{x}]{} L_1 + L_2$,
- (ii) $f_1(x)f_2(x) \xrightarrow[x \rightarrow \bar{x}]{} L_1L_2$.

Dimostrazione. Si definiscono preliminarmente le funzioni $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : X \cup \{\bar{x}\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ in modo tale che:

$$\tilde{f}_1(x) = \begin{cases} L_1 & \text{se } x = \bar{x}, \\ f_1(x) & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad \tilde{f}_2(x) = \begin{cases} L_2 & \text{se } x = \bar{x}, \\ f_2(x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si dimostrano allora i due risultati separatamente.

- (i) Si definisce $\widetilde{f_1 + f_2} : X \cup \{\bar{x}\} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ nel seguente modo:

$$\widetilde{f_1 + f_2}(x) = \begin{cases} L_1 + L_2 & \text{se } x = \bar{x}, \\ f_1(x) + f_2(x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La somma $L_1 + L_2$ è ben definita dacché sia L_1 che L_2 sono elementi di \mathbb{R} . Poiché da una proposizione precedente \tilde{f}_1 e \tilde{f}_2 sono continue in \bar{x} , $\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$ è continua anch'essa in \bar{x} . È sufficiente allora dimostrare che $\widetilde{f_1 + f_2} = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$. Se $x \neq \bar{x}$, $\widetilde{f_1 + f_2}(x) = f_1(x) + f_2(x) = \tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_2(x) = (\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2)(x)$. Se invece $x = \bar{x}$, $\widetilde{f_1 + f_2}(x) = L_1 + L_2 = \tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_2(x)$.

$\widetilde{f_2}(x) = (\widetilde{f_1} + \widetilde{f_2})(x)$. Quindi $\widetilde{f_1 + f_2} = \widetilde{f_1} + \widetilde{f_2}$, e si conclude che $\widetilde{f_1 + f_2}$ è dunque continua in \bar{x} , ossia che $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} L_1 + L_2$.

(ii) Si definisce, analogamente a prima, $\widetilde{f_1 f_2} : X \cup \{\bar{x}\} \rightarrow \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$$\widetilde{f_1 f_2}(x) = \begin{cases} L_1 L_2 & \text{se } x = \bar{x}, \\ f_1(x) f_2(x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Il prodotto $L_1 L_2$ è ben definito dacché sia L_1 che L_2 sono elementi di \mathbb{R} . Poiché da una proposizione precedente $\widetilde{f_1}$ e $\widetilde{f_2}$ sono continue in \bar{x} , $\widetilde{f_1 f_2}$ è continua anch'essa in \bar{x} . È sufficiente allora dimostrare che $\widetilde{f_1 f_2} = \widetilde{f_1} \widetilde{f_2}$. Se $x \neq \bar{x}$, $\widetilde{f_1 f_2}(x) = f_1(x) f_2(x) = \widetilde{f_1}(x) \widetilde{f_2}(x) = (\widetilde{f_1} \widetilde{f_2})(x)$. Se invece $x = \bar{x}$, $\widetilde{f_1 f_2}(x) = L_1 L_2 = \widetilde{f_1}(x) \widetilde{f_2}(x) = (\widetilde{f_1} \widetilde{f_2})(x)$. Quindi $\widetilde{f_1 f_2} = \widetilde{f_1} \widetilde{f_2}$, e si conclude che $\widetilde{f_1 f_2}$ è dunque continua in \bar{x} , ossia che $(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} L_1 L_2$.

□

Definizione. (intorno destro e sinistro) Se $\bar{x} \in \mathbb{R}$, si dicono **interni destri** gli intervalli della forma $[\bar{x}, \bar{x} + \varepsilon]$ con $\varepsilon > 0$. Analogamente, gli **interni sinistri** sono gli intervalli della forma $[\bar{x} - \varepsilon, \bar{x}]$.

Definizione. (punto di accumulazione destro e sinistro) Sia $\bar{x} \in X$. Si dice che \bar{x} è un **punto di accumulazione destro** di X se $\forall I$ intorno destro di \bar{x} , $I \cap X \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$. Analogamente si dice **punto di accumulazione sinistro** di X se è tale per gli interni sinistri.

Definizione. (limite destro e sinistro) Sia \bar{x} un punto di accumulazione destro di X . Allora $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = L \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall I$ intorno di L , $\exists J$ intorno destro di \bar{x} tale che $f(J \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \subseteq I$. Analogamente si definisce il limite sinistro.

Definizione. (continuità destra e sinistra) Sia $\bar{x} \in X$. Allora f è continua a destra in \bar{x} se e solo se $\forall I$ intorno di $f(\bar{x})$, $\exists J$ intorno destro di \bar{x} tale che $f(J \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \subseteq I$. Analogamente si definisce la continuità a sinistra di f .

Osservazione. Vi sono chiaramente alcuni collegamenti tra la continuità destra e sinistra e la continuità classica, così come ve ne sono tra il limite

destro e sinistro ed il limite classico.

- ▶ \bar{x} punto di accumulazione destro o sinistro di $X \iff \bar{x}$ punto di accumulazione di X ,
- ▶ \bar{x} punto di accumulazione destro e sinistro di $X \implies \bar{x}$ punto di accumulazione di X (non è però per forza vero il contrario, è sufficiente considerare $(0, \infty)$, dove 0 è solo un punto di accumulazione destro),
- ▶ f è continua in $\bar{x} \iff f$ è continua sinistra e destra in \bar{x} ,
- ▶ se \bar{x} è un punto di accumulazione destro e sinistro, $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) = L$,
- ▶ se \bar{x} è un punto di accumulazione solo destro, $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = L$,
- ▶ se \bar{x} è un punto di accumulazione solo sinistro, $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) = L$.

Proposizione. Sia $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ monotona e sia \bar{x} un punto di accumulazione destro di X . Allora esiste $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x)$. Analogamente esiste da sinistra se \bar{x} è un punto di accumulazione sinistro di X .

Dimostrazione. Senza perdita di generalità, si assuma f crescente (per il caso decrescente è sufficiente considerare $g(x) = -f(x)$) Si consideri l'insieme:

$$E = \{f(x) \mid x > \bar{x} \text{ e } x \in X\}.$$

Si consideri adesso $L = \inf E$ e un suo intorno I . Se non esistesse un intorno destro J di \bar{x} tale che $f(J \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \subseteq I$, allora $\sup I$ sarebbe un minorante di E maggiore di L , ζ . Quindi tale J esiste, da cui la tesi. Analogamente per il caso sinistro. \square

Esempio. (funzione discontinua in ogni punto di \mathbb{R}) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita nel seguente modo:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

ossia la funzione indicatrice dell'insieme \mathbb{Q} in \mathbb{R} . Si dimostra che f non è continua in nessun punto di \mathbb{R} . Sia infatti $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Dal momento che \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} , \bar{x} è un punto di accumulazione di \mathbb{Q} , e quindi esiste una successione $(x_n) \subseteq \mathbb{Q}$ tale che $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x}$. Se f fosse continua in \bar{x} , $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$, ma per l'intorno $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ non esiste alcun n_k tale per

cui $f(x_n) \in I \forall n \geq n_k$, dal momento che, per definizione di f , $f(x_n) = 1 \forall n \in \mathbb{N}$. Quindi f non è continua in nessun $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Sia ora $\bar{x} \in \mathbb{Q}$. \bar{x} è un punto di accumulazione di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (si può infatti considerare la successione $(x_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ definita da $x_n = \bar{x} + \frac{\sqrt{2}}{n}$, che è tale che $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \bar{x}$). Analogamente a come visto prima, allora, per l'intorno $I = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, $f(x_n) \notin I \forall n \in \mathbb{N}$, e quindi f non è continua neanche su $\bar{x} \in \mathbb{Q}$.

Esercizio 2. Mostrare che l'insieme dei punti di discontinuità di una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ monotona è al più numerabile, dove I è un intervallo.

Soluzione. Si assuma f crescente, senza perdita di generalità (altrimenti è sufficiente considerare $g(x) = -f(x)$). Sia E l'insieme dei punti di discontinuità di f . $\forall \bar{x} \in E$, \bar{x} è un punto di accumulazione destro e sinistro di I (infatti I è un intervallo), ed in particolare esistono sempre il limite destro $L^-(\bar{x})$ ed il limite sinistro $L^+(\bar{x})$ in \bar{x} (dal momento che f è monotona), e sono tali che $L^+(\bar{x}) > L^-(\bar{x})$ (sicuramente sono diversi, altrimenti f sarebbe continua in \bar{x} ; inoltre f è crescente). Allora sia $f : E \rightarrow \mathbb{Q}$ tale che $\bar{x} \mapsto c$, dove $c \in \mathbb{Q}$ è un punto razionale in $(L^-(\bar{x}), L^+(\bar{x}))$ (tale c esiste sempre, per la densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R}). Inoltre, $x < y \implies L^+(x) \leq L^-(y)$, e quindi ogni intervallo da cui è preso c è distinto al variare di $\bar{x} \in E$. Quindi f è iniettiva, e vale $|E| \leq |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$. Si conclude allora che E è al più numerabile.

Teorema. (della permanenza del segno) Data $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ tale che $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L > 0$, allora (x_n) è strettamente positiva definitivamente. Analogamente, se $L < 0$, (x_n) è negativa definitivamente.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità si pone $L > 0$. Allora esiste sicuramente un intorno I di L tale che ogni suo elemento è positivo (e.g. $I = [\frac{L}{2}, \frac{3L}{2}]$, se $L \in \mathbb{R}$, altrimenti $[a, \infty]$ con $a > 0$ se $L = +\infty$). Dal momento che $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L$, $\exists n_k \mid n \geq n_k \implies x_n \in I$, ossia, in particolare, $n \geq n_k \implies x_n > 0$, da cui la tesi. \square

Proposizione. Sia $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e sia \bar{x} un punto di accumulazione di X . Se $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = L > 0$, allora $\exists J$ intorno non vuoto di \bar{x} tale che $f(x) > 0 \forall x \in J \cap X \setminus \{\bar{x}\}$.

Dimostrazione. Analogamente a come visto per il teorema del segno, si pone $L > 0$. Allora esiste sicuramente un intorno I di L tale che ogni suo elemento è positivo. Poiché $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = L > 0$, deve esistere un intorno J di \bar{x} tale che $f(J \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \subseteq I$. In particolare, $J \cap X \setminus \{\bar{x}\}$ non è mai vuoto,

dal momento che \bar{x} è un punto di accumulazione di X , e vale che $f(x) > 0$ $\forall x \in J \cap X \setminus \{\bar{x}\}$ (dal momento che $f(x) \in I$, che ha tutti elementi positivi), da cui la tesi. \square

Teorema. (degli zeri) Dati $I = [a, b]$ e $f : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ continua tale che $f(a)f(b) < 0$ (i.e. sono discordi), allora $\exists c \in (a, b) \mid f(c) = 0$.

Dimostrazione. Senza alcuna perdita di generalità si pone $f(a) < 0 < f(b)$ (il caso $f(a) > 0 > f(b)$ è infine dimostrato considerando $g(x) = -f(x)$). Si definisce allora l'insieme E in modo tale che:

$$E = \{a \in I \mid f(a) < 0\}.$$

Si osserva che $E \neq \emptyset$, dacché $a \in E$. Per la completezza dei numeri reali, E ammette un estremo superiore $\bar{x} := \sup E$. Sia $(x_n) \subseteq E$ una successione tale che $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \bar{x}$: poiché f è continua in \bar{x} , $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}) \implies f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(\bar{x})$. Allora, poiché $f(x_n) < 0 \forall n \in \mathbb{N}$, $f(\bar{x}) \leq 0$ (se così non fosse $f(x_n)$ dovrebbe essere definitivamente positiva per il teorema della permanenza del segno, ma questo è assurdo dacché $x_n \in E \forall n \in \mathbb{N}$, \sharp).

Sia ora $(y_n) \in I$ una successione tale che $y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \bar{x}$ e che $y_n > \bar{x} \forall n \in \mathbb{N}$ (questo è sempre possibile dal momento che $\bar{x} \neq b \iff f(\bar{x}) \leq 0$). Allora, poiché $y_n > \bar{x} = \sup E$, y_n non appartiene ad E , e quindi deve valere che $f(y_n) > 0$. Si conclude allora, per il teorema della permanenza del segno, che $f(\bar{x}) \geq 0$, e quindi che $f(\bar{x}) = 0$, da cui la tesi. \square

Dimostrazione alternativa. (metodo di bisezione per la ricerca degli zeri) Come prima, senza alcuna perdita di generalità, si pone $f(a) < 0 < f(b)$. Si ponga $x_0 = \frac{a+b}{2}$, $I_0 = (a, b)$. Se $f(x_0) = 0$, allora il teorema è dimostrato. Altrimenti, $f(x_0) > 0$ o $f(x_0) < 0$. Nel primo caso, si consideri $I_1 = (a, x_0)$, altrimenti si ponga $I_1 = (x_0, b)$. Si riapplichino allora l'algoritmo con $a := \inf I_1$ e $b := \sup I_1$, definendo la successione (x_n) e gli intervalli I_n per ogni passo n dell'algoritmo.

Se la successione (x_n) è finita, allora $\exists n \mid f(x_n) = 0$, e quindi il teorema è dimostrato. Altrimenti, si osservi che la successione degli intervalli è decrescente, e che $|I_n| = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$: allora, poiché $x_n \in I_n \forall n \in \mathbb{N}$, (x_n) ammette limite. In particolare, $I_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \{c\}$, e quindi $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c \in I_0$. Siano a_n, b_n le successioni tali che $I_n = (a_n, b_n) \forall n \in \mathbb{N}$. Vale in particolare che $a_n, b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} c$. Allora, per la continuità di f su (a, b) , vale che

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c)$ e che $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(c)$: poiché ogni elemento di (a_n) è per costruzione tale che $f(a_n) < 0$, deve valere che $f(x) \leq 0$ per il teorema della permanenza del segno; analogamente deve valere per costruzione di (b_n) che $f(c) \geq 0$. Si conclude allora che $f(c) = 0$, da cui la tesi. \square

Corollario. (dei valori intermedi) Dati $I = (a, b)$ e $f : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ continua, allora $y_1, y_2 \in f(I) \implies [y_1, y_2] \subseteq f(I)$ (ossia f assume tutti i valori compresi tra y_1 e y_2 ; e quindi $f(I)$ è un insieme convesso di \mathbb{R}).

Dimostrazione. Supponiamo $y_1 < y_2$: poiché y_1, y_2 appartengono già a $f(I)$, è sufficiente mostrare che anche ogni $y \in (y_1, y_2)$ appartiene a $f(I)$. Dal momento che $y_1, y_2 \in f(I)$, $\exists x_1, x_2 \in I \mid f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Si consideri allora $g : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tale che $g(x) = f(x) - y$. Allora $g(x_1) = y_1 - y < 0$, mentre $g(x_2) = y_2 - y > 0$. Pertanto, per il teorema degli zeri, $\exists \bar{x} \in (x_1, x_2) \mid g(\bar{x}) = 0 \implies f(\bar{x}) = y$. Si conclude allora che anche $y \in f(I)$, da cui la tesi. \square

Proposizione. Gli unici insiemi convessi di \mathbb{R} sono gli intervalli.

Dimostrazione. La dimostrazione del fatto che gli intervalli siano convessi è banale. Si dimostra piuttosto che ogni insieme convesso di \mathbb{R} è un intervallo. Sia A dunque un insieme convesso di \mathbb{R} , e si considerino $a := \inf A$ e $b := \sup A$. Sia $x \in (a, b)$. Se non esistesse un punto $c \in A$ tale che $a < c < x$, x sarebbe un estremo inferiore di A , \neq . Pertanto tale punto c esiste. Analogamente si può dire per un punto $d \in A$ tale che $x < d < b$. Allora, poiché A è convesso, $[c, d] \subseteq A$, e in particolare $x \in A$. Pertanto vale che $(a, b) \subseteq A$. Poiché a e b sono, rispettivamente, estremo inferiore e superiore di A , non possono esistere altri punti non appartenenti a $[a, b]$, ma appartenenti ad A . Quindi A può variare a seconda dell'appartenenza o meno di questi estremi tra questi insiemi:

- (i) $A = (a, b)$, se $a, b \notin A$,
- (ii) $A = [a, b)$, se $a \in A$, ma $b \notin A$,
- (iii) $A = (a, b]$, se $b \in A$, ma $a \notin A$,
- (iv) $A = [a, b]$, se $a, b \in A$.

In ognuno di questi casi A è un intervallo, da cui la tesi. \square

Osservazione. Una delle principali conseguenze del teorema dei valori intermedi è allora che $f(I)$ stesso è un intervallo, dal momento che è un insieme convesso di \mathbb{R} .

Teorema. (di Weierstrass) Sia I un intervallo chiuso³ e sia $f : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ continua. Allora esistono x_m e x_M punti di massimo e minimo assoluti.

Dimostrazione. Ci si limita a dimostrare l'esistenza del minimo, dacché l'esistenza del massimo segue dal considerare $g = -f$. Sia $m := \inf f(I)$. Esiste allora una successione $(y_n) \subseteq f(I)$ tale che $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m$. Poiché $y_n \in f(I)$, $\exists x_n \in I \mid y_n = f(x_n)$. Per il teorema di Bolzano-Weierstrass, $\exists (x_{n_k}) \subseteq I$ sottosuccessione convergente, ossia tale che $x_{n_k} \rightarrow \bar{x} \in \overline{\mathbb{R}}$. In particolare vale che $\bar{x} \in I$, dal momento che I è un intervallo chiuso. Per la continuità di f (in particolare in \bar{x}), allora $f(x_{n_k}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\bar{x})$. Essendo $f(x_{n_k})$ una sottosuccessione di (y_n) , che è convergente, deve valere che $f(\bar{x}) = m$, ossia $m \in f(I)$, da cui si ricava che $f(I)$ ammette un minimo, ovvverosia la tesi. \square

Osservazione. In particolare, una conseguenza del teorema di Weierstrass è che, nel caso di I chiuso, considerando $f : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ continua, non solo $f(I)$ è un intervallo, ma è anche un intervallo chiuso.

Osservazione. (algoritmo di ricerca dei massimi e dei minimi) Sia $f : I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ la funzione continua di cui si ricerca i massimi e i minimi. Si ipotizzi⁴ di poter considerare $\tilde{f} : \tilde{I} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, ossia l'estensione continua di f . Allora, poiché \tilde{f} è continua ed è definita su un intervallo chiuso, per Weierstrass ammette un massimo e un minimo. Preso per esempio il minimo, esso potrebbe essere un estremo di \tilde{I} , oppure un punto stazionario di f , o infine un punto dell'intervallo I in cui la funzione f non è derivabile. Analogamente l'algoritmo di ricerca funziona per i massimi di f .

³In realtà è sufficiente che I sia chiuso, ossia che contenga i suoi punti di accumulazione.

⁴Non è infatti sempre possibile considerarne un'estensione continua (e.g. $\sin(\frac{1}{x})$, il seno del topologo); ciò accade qualora non esista almeno uno dei limiti negli estremi dell'intervallo di I .