Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

29 marzo 2023

Esercitazione: computo della basi di Jordan

Esempio. Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e se ne ricerchi la forma canonica di Jordan e una base in cui assume tale base.

Si noti che $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, e quindi che $A^3 = 0$. Allora $\varphi_A(t) = t^3$ e $p_A(t) = t^5$.

Poiché A ha ordine di nilpotenza 3, la sua forma canonica di Jordan ammette sicuramente un solo blocco di ordine 3. Inoltre, $\dim \operatorname{Ker} A = 3$, e quindi devono esservi obbligatoriamente 2 blocchi di ordine 1. Pertanto la sua forma canonica è la seguente:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si consideri l'identità $\mathbb{R}^5 = \operatorname{Ker} A^3 = \operatorname{Ker} A^2 \oplus U_1$. Poiché $\dim \operatorname{Ker} A^2 = 4$, vale che $\dim U_1 = \dim \operatorname{Ker} A^3 - \dim \operatorname{Ker} A^2 = 1$. Dacché $\underline{e_3}$ si annulla solo con A^3, $U_1 = \operatorname{Span}(\underline{e_3})$.

Si consideri invece ora $\operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{Ker} A \oplus A(U_1) \oplus U_2$. Si osservi che $\dim U_2$ è il numero dei blocchi di Jordan di ordine 2, e quindi è 0. Si deve allora considerare $\operatorname{Ker} A = A^2(U_1) \oplus U_3$, dove $\dim U_3 = 2$. Si osservi anche che $A^2(\underline{e_3}) = \underline{e_1} - \underline{e_2} - \underline{e_3} + \underline{e_4}$: è sufficiente trovare due vettori linearmente indipendenti appartenenti al kernel di A, ma non nello Span di $A^2(\underline{e_3})$; come per esempio $\underline{e_2} - \underline{e_4}$ e $2\underline{e_2} - \underline{e_5}$. Allora $U_3 = \operatorname{Span}(\underline{e_2} - \underline{e_4}, 2\underline{e_2} - \underline{e_5})$. Una base di Jordan per A sarà allora $(A^2\underline{e_3}, A\underline{e_3}, \underline{e_3}, \underline{e_2} - \underline{e_4}, 2\underline{e_2} - \underline{e_5})$.

Esempio. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, e se ne calcoli la forma canonica di Jordan.

Si osserva che $p_A(t) = (1-t)^3(2-t)^2$, e quindi $\mathbb{R}^5 = \operatorname{Ker}(A-I)^3 \oplus \operatorname{Ker}(A-2I)^2$.

$(\lambda = 1)$ $\dim \operatorname{Ker}(A-I) = 2$, quindi ci sono due blocchi relativi all'autovalore 1, uno di ordine 1 e uno di ordine 2.

$(\lambda = 2)$ $\dim \operatorname{Ker}(A-2I) = 2$, quindi ci sono due blocchi relativi all'autovalore 2, entrambi di ordine 1.

Quindi la forma canonica di A è la seguente:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

da cui si ottiene anche che $p_A(t) = (t-2)^2(t-2)$. Si calcola ora una base di Jordan per A.

$(\lambda = 1)$ Sia $\operatorname{Ker}(A-I)^2 = \operatorname{Ker}(A-I) \oplus U_1$. $\dim U_1 = 1$, e poiché $\underline{e_5} \in \operatorname{Ker}(A-I)^2$, ma $\underline{e_5} \notin \operatorname{Ker}(A-I)$, vale che $U_1 = \operatorname{Span}(\underline{e_5})$.

Sia ora invece $\operatorname{Ker}(A-I) = g(U_1) \oplus U_2$, dove $\dim U_2 = 1$. Dacché $\underline{e_5} + \underline{e_1} - \underline{e_3} \in \operatorname{Ker}(A-I)$, ma non appartiene a $\operatorname{Span}(A\underline{e_5})$, si ottiene che una base relativa al blocco di 1 è $A\underline{e_5}, \underline{e_5}, \underline{e_5} + \underline{e_1} - \underline{e_3}$.

($\lambda = 2$) Per quanto riguarda invece il blocco relativo a 2, essendo tale blocco diagonale, è sufficiente ricavare una base di $\mathrm{Ker}(A - 2I)$, come $\underline{e_4}$ e $\underline{e_1} + \underline{e_3}$.

Definizione. (centralizzatore di una matrice) Si definisce **centralizzatore di una matrice** $A \in M(n, \mathbb{K})$ l'insieme:

$$C(A) = \{B \in M(n, \mathbb{K}) \mid AB = BA\},$$

ossia l'insieme delle matrici che commutano con A.

Proposizione. Vale l'identità $C(J_{0,m}) = \mathrm{Span}(I, J_{0,m}, J_{0,m}^2, ..., J_{0,m}^{m-1})$.

Dimostrazione. Sia $B \in C(J_{0,m})$. Si osserva che $J_{0,m}B = \begin{pmatrix} B_2 \\ \hline B_3 \\ \hline \vdots \\ \hline B_m \\ \hline 0 \end{pmatrix}$, mentre $BJ_{0,m} = \left(0 \mid B^1 \mid B^2 \mid \cdots \mid B^{m-1}\right)$. Per ipotesi deve valere che $J_{0,m}B = BJ_{0,m}$, e quindi, uguagliando le matrici colonna a colonna, si osserva la colonna B^1 è tutta nulla eccetto per il primo elemento; si osserva poi che la colonna B^2 è composta da elementi di B^1 traslata in basso di una posizione; e così via ciclando sulle colonne, ottenendo che, data $B^m = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{pmatrix}$, $B = a_0 I + a_1 J_{0,m} + \ldots + a_{m-1} J_{0,m}^{m-1}$, quindi $B \in \mathrm{Span}(I, J_{0,m}, J_{0,m}^2, ..., J_{0,m}^{m-1})$. Dal momento che ogni elemento generatore di $\mathrm{Span}(I, J_{0,m}, J_{0,m}^2, ..., J_{0,m}^{m-1})$ commuta con $J_{0,m}$, vale la doppia inclusione, da cui la tesi. $\square$

Osservazione. Sul centralizzatore di una matrice ed il suo rapporto con la similitudine si possono fare alcune considerazioni.

▶ $A \sim B \implies \dim C(A) = \dim C(B)$: infatti, se $A = PBP^{-1}$, $AC = CA \implies PBP^{-1}C = CPBP^{-1} \implies BP^{-1}C = P^{-1}CPBP^{-1} \implies B(P^{-1}CP) = (P^{-1}CP)B$, e quindi il coniugio fornisce un isomorfismo tra i due centralizzatori.