

Appunti di Fisica

Gabriel Antonio Videtta

19 gennaio 2022

Indice

1	I moti principali della fisica	2
1.1	Il moto uniformemente accelerato (m.u.a.)	2
1.1.1	Le equazioni del moto in un sistema di riferimento unidimensionale	2
1.1.2	Lo spostamento in funzione della velocità e dell'accelerazione	3
1.2	Il moto dei proiettili	3
1.2.1	Le equazioni del moto dei proiettili	3
1.2.2	Il calcolo della gittata e della traiettoria	4
1.3	Il moto circolare uniforme	4
1.3.1	Le equazioni del moto circolare uniforme	4
1.3.2	L'accelerazione centripeta	5

Capitolo 1

I moti principali della fisica

1.1 Il moto uniformemente accelerato (m.u.a.)

Conoscendo le definizioni di accelerazione ($\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$) e di velocità ($\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$) è possibile, ponendo l'accelerazione costante (i.e. il *jerk* è nullo, $\frac{d\vec{a}}{dt} = 0$), ricavare numerose formule.

1.1.1 Le equazioni del moto in un sistema di riferimento unidimensionale

Le equazioni del moto sono le seguenti:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v(t) = v_0 + a t \end{cases} \quad (1.1)$$

Dimostrazione. Da $a = \frac{dv}{dt}$, si ricava $dv = a \cdot dt$, da cui:

$$\int dv = \int a dt = a \int dt \Rightarrow v = v_0 + at$$

Dimostrata questa prima equazione, è possibile dimostrare in modo analogo l'altra:

$$\int dx = \int v \cdot dt = \int v_0 dt + \int at dt = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

La dimostrazione può essere inoltre resa immediata se si sviluppano $x(t)$ e $v(t)$ come serie di Taylor-Maclaurin.

□

1.1.2 Lo spostamento in funzione della velocità e dell'accelerazione

Senza ricorrere alla variabile di tempo t , è possibile esprimere lo spostamento in funzione della velocità e dell'accelerazione mediante la seguente formula:

$$x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \quad (1.2)$$

Dimostrazione. Considerando $a = \frac{dv}{dt}$, è possibile riscrivere, mediante l'impiego delle formule di derivazione delle funzioni composte, quest'ultima formula:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dx} = v \frac{dv}{dx}$$

Da ciò si può ricavare infine l'ultima formula:

$$a dx = v dv \Rightarrow a \int dx = \int v dv$$

E quindi:

$$a(x - x_0) = \frac{v^2 - v_0^2}{2} \Rightarrow x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

□

1.2 Il moto dei proiettili

Il *moto dei proiettili*, o moto parabolico, non è altro che la forma vettoriale del m.u.a. sfruttando due accelerazioni per entrambe le dimensioni: una nulla (quella dello spostamento parallelo al terreno) ed una pari a $-g$ (quella data dalla gravità nello spostamento normale al terreno).

1.2.1 Le equazioni del moto dei proiettili

Riprendendo le precedenti considerazioni, si può dunque scrivere l'equazione del moto in forma vettoriale:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t^2 \quad (1.3)$$

O si può separare quest'ultima in due equazioni:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 \cos(\theta)t \\ y(t) = y_0 + v_0 \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \quad (1.4)$$

1.2.2 Il calcolo della gittata e della traiettoria

Definita la *gittata* come la distanza tra il punto di lancio ed il punto in cui il corpo assume la stessa ordinata del punto di lancio e la *traiettoria* come la distanza tra il punto di lancio ed il punto in cui il corpo assume la massima ordinata, si possono facilmente dimostrare le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x_{\text{gittata}} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \\ x_{\text{traiettoria}} = \frac{1}{2}x_{\text{gittata}} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{2g} \end{cases} \quad (1.5)$$

1.3 Il moto circolare uniforme

Definendo alcune grandezze fisiche in modo analogo a come vengono proposte nel m.u.a., è possibile riproporre le equazioni 1.1 mediante l'impiego di grandezze esclusivamente angolari.

1.3.1 Le equazioni del moto circolare uniforme

Si definiscono dunque le seguenti grandezze:

- θ in funzione del tempo
- $\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$
- $\alpha = \ddot{\theta} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

Innanzitutto, è possibile coniugare il mondo angolare con quello cartesiano, tenendo conto del fatto che $x = \theta r$. In questo modo si ricavano le seguenti relazioni:

- $v = \omega r$, la velocità angolare
- $a_t = \alpha r$, l'accelerazione tangenziale (da distinguersi da quella centripeta!)

Per sostituzione, dalle equazioni 1.1 si ottengono dunque le analoghe seguenti:

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega = \omega_0 + \alpha t \end{cases} \quad (1.6)$$

1.3.2 L'accelerazione centripeta

Oltre all'accelerazione tangenziale, direttamente proporzionale a quella lineare, è possibile definire anche un altro tipo di accelerazione: **l'accelerazione centripeta** (a_c), diretta dal corpo verso il centro della circonferenza sulla quale questo muove.

Questo tipo di accelerazione è costante nel moto circolare uniforme ed è calcolata mediante la seguente equazione:

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (1.7)$$

Dimostrazione. La velocità può essere espressa vettorialmente nella seguente forma $\vec{v}(-v \sin(\theta), v \cos(\theta))$, mentre le funzioni trigonometriche possono essere sostituite utilizzando le coordinate del punto ed il raggio della circonferenza su cui si muove il corpo secondo le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{r} \\ \sin(\theta) = \frac{y}{r} \end{cases}$$

Perciò, derivando la velocità, si ottiene l'accelerazione nella seguente forma:

$$\vec{a} = \left(-\frac{v}{r} \cdot v_y, \frac{v}{r} \cdot v_x\right)$$

Computando il modulo dell'accelerazione e tenendo conto che $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, si ottiene il risultato desiderato:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

□