

# Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

5 maggio 2023

## Affinità e spazio proiettivo

**Nota.** Qualora non specificato diversamente, con  $E$  si indicherà un generico spazio affine di dimensione  $n$  su cui agisce lo spazio vettoriale  $V$ .

Sia  $f$  un'applicazione affine di  $E$ . Allora, per ogni  $O \in E$ ,  $\underline{v} \in V$ ,  $f(O + \underline{v}) = f(O) + g(\underline{v})$ , dove  $g \in \text{End}(V)$  è l'applicazione lineare associata ad  $f$ . Pertanto  $f(O + \underline{v}) = O + (f(O) - O) + g(\underline{v})$ , ossia  $f$  è una traslazione di vettore  $f(O) - O$  composta ad un'applicazione lineare.

In particolare, passando alle coordinate rispetto al punto  $O$  e una base  $\mathcal{B}$  di  $V$ , si può riscrivere  $[f(P)]_{O, \mathcal{B}}$  secondo la seguente identità:

$$[f(P)]_{O, \mathcal{B}} = \underbrace{[f(O) - O]_{\mathcal{B}}}_{\underline{b}} + \underbrace{[g(P - O)]_{\mathcal{B}}}_{A[\underline{v}]_{\mathcal{B}}} = A[P - O]_{\mathcal{B}} + \underline{b},$$

dove  $A = M_{\mathcal{B}}(g)$ . In particolare, in  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ , scegliendo  $O = \underline{0}$  come origine e la base canonica come base  $\mathcal{B}$ , si ottiene che:

$$f(\underline{v}) = A\underline{v} + \underline{b},$$

per ogni  $\underline{v} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ . Se  $f \in A(E)$ , allora vale anche che:

$$f^{-1}(O + \underline{w}) = f^{-1}(f(O) + (O - f(O)) + \underline{w}) = O - g^{-1}(f(O) - O) + g^{-1}(\underline{w}),$$

dove si è usato che  $g$  è invariante per cambiamento del punto d'origine  $O$ . Pertanto, in questo caso, passando alle coordinate, vale che:

$$[f^{-1}(P)]_{O, \mathcal{B}} = A^{-1}[P - O]_{\mathcal{B}} - A^{-1}\underline{b}.$$

Considerando questa identità in  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ , risulta che:

$$f^{-1}(\underline{v}) = A^{-1}\underline{v} - A^{-1}\underline{b},$$

per ogni  $\underline{v} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ .

Sia  $\iota : \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \rightarrow H_{n+1}$  l'applicazione che associa  $\underline{x}$  a  $\begin{pmatrix} \underline{x} \\ 1 \end{pmatrix} \in H_{n+1}$ , dove vale che:

$$H_{n+1} = \left\{ \left( \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{array} \right) \mid x_{n+1} = 1 \right\},$$

ossia l'iperpiano affine di  $\mathcal{A}_{n+1}(\mathbb{K})$  dei vettori con l'ultima coordinata pari a 1. Per comodità si indica  $\iota(\underline{x})$  con  $\hat{\underline{x}}$ .

**Proposizione.**  $\iota$  è un isomorfismo affine.

*Dimostrazione.* Si verifica innanzitutto che  $\iota$  è un'applicazione affine. Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$  tali che  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ , e siano  $\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k \in E$ . Allora vale che:

$$\iota \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i \right) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{x}_i \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \iota(\underline{x}_i).$$

Si consideri<sup>1</sup> ora l'applicazione lineare  $g$  associata a  $\iota$ . Allora, posto  $O = \underline{0}$ ,  $g(\underline{v}) = f(O + \underline{v}) - f(O) = f(\underline{v}) - f(\underline{0}) = f(\underline{v}) - (0 \ \cdots \ 0 \ 1)^\top$ . Dal momento che la direzione di  $H_{n+1}$  è  $n$ -dimensionale (scegliendo  $O$  come origine, tutti i vettori ottenibili scartano l'ultima coordinata, sempre pari a 0),  $g$  mappa due spazi vettoriali di stessa dimensione.

Pertanto, è sufficiente dimostrare che  $g$  è surgettiva affinché sia invertibile (e dunque  $\iota$  sia un isomorfismo affine). Chiaramente  $g$  è surgettiva, dal momento che ad ogni vettore  $\hat{\underline{v}} = (\underline{v} \ 0) \in \text{Giac}(H_{n+1})$  è tale che  $g(\underline{v}) = \hat{\underline{v}}$ . Si conclude dunque che  $g$  è invertibile, e che  $\iota$  è un isomorfismo affine.  $\square$

**Proposizione.** Sia  $f \in A(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))$  e sia  $f' = \iota \circ f \circ \iota^{-1} \in A(H_{n+1})$  l'identificazione di  $f$  in  $H_{n+1}$ . Allora si può estendere  $f'$  ad un'applicazione lineare invertibile  $\hat{f}$  di  $\mathbb{K}^{n+1}$  (ossia ad un'applicazione  $\hat{f}$  tale per cui  $\hat{f}|_{H_{n+1}} = f'$ ).

<sup>1</sup>Per concludere in modo più diretto la dimostrazione è sufficiente anche esibire l'inverso di  $g$ , ottenuto ignorando l'ultima coordinata di un vettore di  $H_{n+1}$ .

Viceversa, data un'applicazione lineare invertibile  $g \in \text{End}(\mathbb{K}^{n+1})$  tale che  $g|_{H_{n+1}} = H_{n+1}$ , allora la restrizione  $g|_{H_{n+1}}$  è un'affinità di  $H_{n+1}$  ed induce un'affinità  $f$  di  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  in modo tale che  $f = \iota^{-1} \circ g|_{H_{n+1}} \circ \iota$ .

In particolare, una tale  $\hat{f}$  è tale che  $\hat{f}(\underline{x}') = A'\underline{x}' \forall \underline{x}' \in \mathbb{K}^{n+1}$ , dove vale che:

$$A' = \left( \begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right), \quad f(\underline{v}) = A\underline{v} + \underline{b} \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}).$$

*Dimostrazione.* Si consideri  $\hat{f} \in \text{End}(\mathbb{K}^{n+1})$  tale che  $\hat{f}(\underline{x}') = A'\underline{x}'$ .  $\hat{f}$  è invertibile dal momento che  $A'$  lo è. Infatti vale che:

$$(A')^{-1} = \left( \begin{array}{c|c} A^{-1} & -A^{-1}\underline{b} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right).$$

Sia  $\hat{x} = (\underline{x} \ 1)^\top \in H_{n+1}$ . Sia ora  $\hat{x} \in H_{n+1}$ . Allora  $\hat{f}(\hat{x}) = (A\underline{x} + \underline{b} \ 1)^\top = (f(\underline{x}) \ 1)^\top = \iota(f(\underline{x})) = \iota(f(\iota^{-1}(\hat{x}))) = f'(\hat{x}) \in H_{n+1} \forall \hat{x} \in H_{n+1}$ . Pertanto  $\hat{f}|_{H_{n+1}} = f'$ .

Si consideri adesso  $g \in \text{GL}(\mathbb{K}^{n+1})$  tale che  $g|_{H_{n+1}} = H_{n+1}$ . Sia  $A'$  tale che  $g(\underline{x}') = A'\underline{x}' \forall \underline{x}' \in \mathbb{K}^{n+1}$ . Poiché  $g|_{H_{n+1}} = H_{n+1}$ , allora  $(A')_{n+1,n+1} = g(\underline{e}_{n+1})_{n+1} = 1$ . Poiché  $g(\underline{e}_n + \underline{e}_{n+1})_{n+1} = 1$ , allora  $(A')_{n+1,n} = 0$ . In particolare, partendo da  $j = n$  fino a  $j = 1$ , si deduce, per induzione, che  $g(\underline{e}_j + \dots + \underline{e}_{n+1})_{n+1} = 1 \implies (A')_{n+1,j} = 0$ .

Allora  $A'$  è della seguente forma:

$$A' = \left( \begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right), \quad A \in M(n, \mathbb{K}), \underline{b} \in \mathbb{K}^n.$$

Considerando allora l'applicazione affine  $f \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  tale che  $f(\underline{v}) = A\underline{v} + \underline{b}$ ,  $g$  è l'applicazione lineare invertibile che estende  $f' = \iota \circ f \circ \iota^{-1}$ , come visto prima, da cui la tesi.  $\square$

**Osservazione.** Le matrici della forma:

$$\left( \begin{array}{c|c} A & \underline{b} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right), \quad A \in M(n, \mathbb{K}), \underline{b} \in \mathbb{K}^n,$$

formano un sottogruppo di  $(M(n+1, \mathbb{K}), \cdot)$  canonicamente isomorfo a  $A(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))$ . In particolare si osserva che un'affinità dipende da esattamente

$n^2 + n$ , dove  $n^2$  sono i parametri su cui si basa  $A$ , e  $n$  sono i parametri su cui si basa  $\underline{b}$ .

Se  $D \subseteq E$  è un sottospazio affine di  $E$ , l'insieme  $T = \{f \in A(E) \mid f(D) = D\}$  forma un sottogruppo di  $(A(E), \circ)$ . In particolare, se  $\dim D = k$ , un'afinità di  $T$  dipende da esattamente  $(k+1)k + (n-k)n$  parametri.

Infatti in tal caso, scegliendo una base opportuna di  $D_0$ , estesa poi a base di  $E_0$ , e riferendosi ad un'origine di  $D$ ,  $A$  conterrà un blocco  $k^2$  relativo alle immagini della base di  $D$  ed un blocco  $(n-k)n$  relativo alle immagini degli altri vettori, non appartenenti a  $D$ . Inoltre dovranno essere scelti i parametri riguardanti il vettore  $\underline{b}$ , che, essendo stato scelto come riferimento un punto d'origine appartenente a  $D$ , richiederà la scelta di  $k$  parametri.

**Definizione** (spazio proiettivo). Si definisce lo **spazio proiettivo**  $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  come l'insieme dei sottospazi di dimensione unitaria di  $\mathbb{K}^{n+1}$ .

**Osservazione.** Se si definisce la relazione di equivalenza  $\sim$  su  $V$  in modo tale che  $\underline{x} \sim \underline{y} \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \alpha \in \mathbb{K}^* \mid \underline{x} = \alpha \underline{y}$ ,  $V/\sim$  è in bigezione con lo spazio proiettivo. In particolare, ogni elemento di  $V/\sim$  è un unico elemento dello spazio proiettivo a cui è stato tolto il vettore  $\underline{0}$ .

**Osservazione.** Ogni elemento  $\hat{x} = (\underline{x} \ 1)^\top$  di  $H_{n+1}$  identifica un unico elemento dello spazio proiettivo, ossia  $\text{Span}(\hat{x})$ , dal momento che due vettori di  $H_{n+1}$  appartengono alla stessa retta se e solo se sono linearmente dipendenti, ossia se sono uguali.

Gli elementi di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  che non contengono elementi di  $H_{n+1}$  sono esattamente i sottospazi contenenti vettori la cui ultima coordinata è nulla. Pertanto questi elementi, detti **punti all'infinito** di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ , si possono identificare in particolare come elementi di  $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{K})$ .

**Osservazione.** Si può ricoprire  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  con iperpiani analoghi ad  $H_{n+1}$ , ossia con gli iperpiani della seguente forma:

$$T_i = \left\{ \left( \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{array} \right) \mid x_i = 1 \right\}.$$

Ogni elemento di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$  interseca infatti almeno uno di questi iperpiani, dacché in esso deve esistervi obbligatoriamente un vettore non nullo. In particolare, se esiste un'intersezione tra  $T_i$  e un elemento di  $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ , questa è unica.

---

**Teorema.** Sia  $E$  uno spazio affine sullo spazio  $V$  di dimensione  $n$ . Allora valgono i seguenti due risultati.

- (i) Se  $f \in A(E)$  e i punti  $P_1, \dots, P_k$  sono affinementemente indipendenti, allora anche i punti  $f(P_1), \dots, f(P_k)$  sono affinementemente indipendenti.
- (ii) Se i punti  $P_1, \dots, P_{n+1}$  sono affinementemente indipendenti, e lo sono anche i punti  $Q_1, \dots, Q_{n+1}$ , allora esiste un'unica affinità  $f \in A(E)$  tale che  $f(P_i) = Q_i \forall 1 \leq i \leq n+1$ .

*Dimostrazione.* Si dimostrano i due risultati separatamente.

- (i) Poiché  $f \in A(E)$ , allora  $g \in \text{GL}(V)$ , ed è dunque invertibile. Si considerino i vettori  $f(P_i) - f(P_1) = g(P_i - P_1)$  con  $2 \leq i \leq k$ . Dal momento che è invertibile,  $g$  mappa vettori linearmente indipendenti a vettori ancora linearmente indipendenti.

Allora, poiché i punti  $P_1, \dots, P_k$  sono affinementemente indipendenti, i vettori  $P_i - P_1$  sono linearmente indipendenti per  $2 \leq i \leq k$ . Pertanto anche i vettori  $g(P_i - P_1) = f(P_i) - f(P_1)$  con  $2 \leq i \leq k$  sono linearmente indipendenti, da cui si conclude che i punti  $f(P_1), \dots, f(P_k)$  sono affinementemente indipendenti.

- (ii) Dal momento che i punti  $P_1, \dots, P_{n+1}$  sono affinementemente indipendenti, allora i vettori  $P_i - P_1$  con  $2 \leq i \leq n+1$  sono linearmente indipendenti, e formano dunque una base di  $V$ , essendo tanti quanti la dimensione di  $V$ . Analogamente anche i vettori  $Q_i - Q_1$  con  $2 \leq i \leq n+1$  formano una base di  $V$ .

In particolare esiste una sola applicazione lineare  $g$  che associa a  $P_i - P_1$  il vettore  $Q_i - Q_1$ , con  $2 \leq i \leq n+1$ . Dacché le immagini formano una base di  $V$ ,  $g$  è suriettiva, e dunque, poiché  $g \in \text{End}(V)$ ,  $g$  è anche invertibile. Un'affinità  $f \in A(E)$  tale che  $f(P_i) = Q_i$  con  $1 \leq i \leq n+1$  è per esempio  $f(P) = Q_1 + g(P - P_1)$ .

Si mostra che tale  $f$  è anche unica. Se esistesse  $f' \in A(E)$  con le stesse proprietà di  $f$ , varrebbe che  $Q_i - Q_1 = f'(P_i) - f'(P_1) = g'(P_i - P_1) \forall 2 \leq i \leq n+1$ . Tuttavia una  $g'$  tale che mappi  $P_i - P_1$  a  $Q_i - P_1 \forall 2 \leq i \leq n+1$  è unica, e quindi  $g' = g$ . Allora  $f'(P) = Q_1 + g(P - P_1) = f(P) \forall P \in E \implies f' = f$ .  $\square$

**Proposizione.** Sia  $f \in A(E)$  e sia  $D$  un sottospazio affine di  $E$ . Allora anche  $f(D)$  è un sottospazio affine di  $E$  della stessa dimensione di  $D$ .

*Dimostrazione.* Sia  $P_0 \in D$ . Allora  $(f(D))_0 = \{f(P) - f(P_0) \forall P \in D\} = \{g(\underline{v}) \forall \underline{v} \in D_0\} = g(D_0)$ . Dal momento che  $f$  è un'affinità,  $g$  è invertibile, e quindi preserva la dimensione di  $D_0$ . Pertanto  $\dim(f(D))_0 = \dim D_0 \implies \dim f(D) = \dim D$ .  $\square$

**Osservazione.** Siano  $D$  e  $D'$  due sottospazi affini di  $E$ . Allora  $D \cap D'$  è sempre o vuoto o un sottospazio affine. Se infatti  $D \cap D'$  non è vuoto, presa una sua combinazione affine, essa è in particolare una combinazione affine sia di punti di  $D$  che di punti di  $D'$ , per cui appartiene a  $D \cap D'$ .

**Proposizione.** Siano  $D$  e  $D'$  due sottospazi affini di  $E$  con  $D \cap D' \neq \emptyset$ . Allora valgono i seguenti due risultati:

- (i)  $\text{Aff}(D \cup D')_0 = D_0 + D'_0$ ,
- (ii)  $(D \cap D')_0 = D_0 \cap D'_0$ .

*Dimostrazione.* Si dimostrano i due risultati separatamente.

- (i) Si dimostra l'identità mostrando che vale la doppia inclusione dei due spazi vettoriali. Sia innanzitutto  $\underline{u} \in D_0 + D'_0$ . Allora esistono  $\underline{v} \in D_0$ ,  $\underline{w} \in D'_0$  tali che  $\underline{u} = \underline{v} + \underline{w}$ . Dal momento che  $D \cap D' \neq \emptyset$ , esiste un punto  $P \in D \cap D'$ .

Dacché allora  $\underline{v} \in D_0$ , esiste  $P_1 \in D$  tale che  $\underline{v} = P_1 - P$ . Analogamente  $\exists P_2 \in D'$  tale che  $\underline{w} = P_2 - P$ . Allora  $\underline{u} = \underline{v} + \underline{w} = (P_1 - P) + (P_2 - P) = (P_1 + P_2 - P) - P$ , dove  $P_1 + P_2 - P$  è una combinazione affine di  $\text{Aff}(D \cup D')$ . Allora, poiché  $P \in \text{Aff}(D \cup D')$ ,  $\underline{u} \in \text{Aff}(D \cup D')_0$ , da cui si deduce che  $D_0 + D'_0 \subseteq \text{Aff}(D \cup D')$ .

Sia ora  $\underline{u} \in \text{Aff}(D \cup D')_0$ . Allora esistono  $P_1, \dots, P_k$  punti di  $D$ ,  $Q_1, \dots, Q_{k'}$  punti di  $D'$  e  $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_{k'} \in \mathbb{K}$  tali che:

$$\underline{u} = \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i + \sum_{j=1}^{k'} \mu_j Q_j \right) - P, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i + \sum_{j=1}^{k'} \mu_j = 1.$$

Allora si può riscrivere  $\underline{u}$  come:

$$\underline{u} = \underbrace{\left( \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i + \sum_{j=1}^{k'} \mu_j P \right)}_{\in D} - P + \underbrace{\left( \sum_{i=1}^k \lambda_i P + \sum_{j=1}^{k'} \mu_j Q_j \right)}_{\in D'} - P,$$

dove, ricordando che  $P \in D \cap D'$ , vale che:

$$\left( \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i + \sum_{j=1}^{k'} \mu_j P \right) - P \in D_0, \quad \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i P + \sum_{j=1}^{k'} \mu_j Q_j \right) - P \in D'_0,$$

da cui si conclude che  $\underline{u} \in D_0 + D'_0 \implies \text{Aff}(D \cup D')_0 \subseteq D_0 + D'_0$ , e quindi che  $\text{Aff}(D \cup D')_0 = D_0 + D'_0$ .

- (ii) Come prima, si dimostra l'identità mostrando che vale la doppia inclusione dei due spazi vettoriali. Sia  $\underline{u} \in D_0 \cap D'_0$ . Sia  $P \in D \cap D'$ . Allora esiste  $P_1 \in D$  tale che  $\underline{u} = P - P_1$ . Analogamente esiste  $P_2 \in D'$  tale che  $\underline{u} = P - P_2$ . Poiché  $E$  è  $V$ -omogeneo, esiste un solo punto  $P'$  tale che  $P = P' + \underline{u}$ . Si conclude dunque che  $P_1 = P_2$ , e dunque che  $P_1$  appartiene anche a  $D'$ . Pertanto  $\underline{u} \in (D \cap D')_0 \implies D_0 \cap D'_0 \subseteq (D \cap D')_0$ .

Sia ora invece  $\underline{u} \in (D \cap D')_0$ . Allora esiste  $P_1 \in D \cap D'$  tale che  $\underline{u} = P - P_1$ . In particolare, dal momento che  $P$  e  $P_1$  appartengono a  $D$ ,  $\underline{u} \in D_0$ . Analogamente  $\underline{u} \in D'_0$ . Pertanto  $\underline{u} \in D_0 \cap D'_0 \implies (D \cap D')_0 \subseteq D_0 \cap D'_0$ , da cui si conclude che  $(D \cap D')_0 = D_0 \cap D'_0$ .  $\square$

**Proposizione** (formula di Grassmann per i sottospazi affini). Siano  $D$  e  $D'$  due sottospazi affini di  $E$  con  $D \cap D' \neq \emptyset$ . Allora  $\dim \text{Aff}(D \cup D') = \dim D + \dim D' - \dim(D \cap D')$ .

*Dimostrazione.* Per la proposizione precedente,  $\dim \text{Aff}(D \cup D') = \dim(D_0 + D'_0)$ . Allora, applicando la formula di Grassmann per i sottospazi vettoriali,  $\dim(D_0 + D'_0) = \dim D_0 + \dim D'_0 - \dim(D_0 \cap D'_0) = \dim D + \dim D' - \dim(D_0 \cap D'_0)$ . Sempre per la proposizione precedente,  $D_0 \cap D'_0 = (D \cap D')_0$ , da cui si deduce che  $\dim(D_0 \cap D'_0) = \dim(D \cap D')_0 = \dim D \cap D'$ . Pertanto  $\dim \text{Aff}(D \cup D') = \dim D + \dim D' - \dim(D \cap D')$ .  $\square$