Metodo di riduzione

Il metodo di riduzione mantiene la dipendenza (o indipendenza) lineare delle colonne (riscrivi)

Data una matrice a scala ridotta:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cccccc|c} p_1 & 0 & 0 & & & & \\ & p_2 & 0 & & & & \underline{b} \\ & & p_3 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \end{array}\right]$$

una sua soluzione è sempre costruita inserendo i termini noti nelle coordinate dei pivot e zero negli altri posti.

$$\dim \ker A = n - rg(A) = n - \underbrace{k}_{\text{pivot}}$$

- $A_i \longleftrightarrow A_j$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \underset{j}{1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \underset{i}{1} & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \end{bmatrix}$$

- $A_i \longrightarrow \lambda A_i$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \underset{i}{\lambda} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \lambda A_i \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$\cdot\ A_i \to A_i + \lambda A_j$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdots & & \underset{i}{1} & \cdots & \underset{j}{\lambda} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i + \lambda A_j \\ \vdots \end{bmatrix}$

Prop. $rg(A+B) \leq rg(A) + rg(B)$

$$\mathrm{Span}(A^1+B^1, \dots) \subset \mathrm{Span}(A^1, \dots) + \mathrm{Span}(B^1, \dots) \Rightarrow$$

$$\to rg(A+B) \leq \dim(\mathrm{Span}(A_1, \dots) + \mathrm{Span}(B_1, \dots)) =$$

$$= rg(A) + rg(B) - \dim(\mathrm{Span}(A_1, \dots) \cap \mathrm{Span}(B_1, \dots)) \leq$$

$$\leq rg(A) + rg(B). \qquad \boxtimes$$

Corollario $rg(M^{(1)} + \dots + M^{(k)}) \leq k$, se $rg(M^{(i)}) = 1$.

Teorema $rg(A) = \min\{ h \in \mathbb{N} \mid A = M^{(1)} + \dots + M^{(h)}, rg(M^{(i)}) = 1 \}$

Supponiamo $rg\, A = k$. Ci sono dunque k colonne lin. ind. e le rimanenti sono comb. lin. di queste. wlog le colonne lin. ind. sono le prime k. Allora $A^i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{i,j} A^j$ per $i > k$. Costruisco allora $M^{(1)} = [A^{(1)} | \dots | \dots | \overset{k}{\overrightarrow{\alpha_{k+1,1} A^{(1)}}} | \dots | \dots | \alpha_{n,1} A^{(1)}]$, $M^{(2)} = [0 | A^{(2)} | \dots | \dots | \alpha_{k+1,2} A^{(2)} | \dots | \dots | \dots | \alpha_{n,2} A^{(2)}]$. $\sum_{i=1}^{k} M^{(i)} = [A^{(1)} | A^{(2)} | \dots | A^{(n)}] = A$

Inoltre A non può essere somma di meno di K matrici di rango 1, altrimenti $rg(A) \leq h < K$, che è assurdo. $\boxtimes$

OSS.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ \vdots & \ddots & & \\ a_mb_1 & & & a_mb_n \end{bmatrix} =$$

$$= (a_i \cdot b_j)_{\substack{i=1\to m \\ j=1\to n}}$$

OSS.2 $rg(A) = 1 \wedge A^1 \neq \underline{0} \implies$ ogni A^i si scrive come multiplo di A^1

Prop. Ogni matrice di rango uno si può scrivere nella forma $A \cdot {}^TB$ con $A \in K^m$, $B \in K^n$.

$$A = \left[A^1 \mid \lambda_2 A^1 \mid \lambda_3 A^1 \mid \cdots \mid \lambda_n A^1 \right] =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}}_{A^1} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}}_{{}^TB}$$