

# Note del corso di Analisi Matematica 1

Gabriel Antonio Videtta

31 marzo, 4 e 18 aprile 2023

## Teoria sulle derivate

**Definizione.** (derivata) Sia  $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si definisce allora **derivata** di  $f$  in  $\bar{x} \in X$  punto di accumulazione, se esiste, il seguente limite:

$$Df(\bar{x}) = f'(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}.$$

Qualora tale limite non esista, si dirà che non esiste la derivata di  $f$  in  $\bar{x}$ . Si definisce anche  $f' : D \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$  come la funzione derivata, la quale associa ogni punto  $\bar{x}$  in cui la derivata di  $f$  esiste al valore del limite computato in  $\bar{x}$ .

**Definizione.**  $\bar{x} \in X$  si dice **derivabile** se e solo se esiste la derivata di  $f$  in  $\bar{x}$  e  $f'(\bar{x})$  è finito.

**Osservazione.**

- ▶ L'insieme  $D$  può essere vuoto.
- ▶ Si definisce  $f^{(n)}(\bar{x})$  come la derivata  $n$ -esima di  $f$  in  $\bar{x}$ .
- ▶ Si definisce per convenzione  $f^{(0)}(x) = f(x)$ .
- ▶ L'operazione di derivata è un operatore lineare.

**Definizione.** (derivata destra e sinistra) Dato  $\bar{x}$  punto di accumulazione destro di  $X$ , si definisce allora **derivata destra** di  $f$  in  $\bar{x} \in X$ , se esiste, il seguente limite:

$$D_+f(\bar{x}) = f'_+(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} = \lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}.$$

Qualora tale limite non esista, si dirà che non esiste la derivata destra di  $f$  in  $\bar{x}$ . Analogamente, per un punto di accumulazione sinistro  $\bar{x} \in X$ , si definisce la **derivata sinistra** di  $f$  in  $\bar{x} \in X$ , se esiste, il seguente limite:

$$D_- f(\bar{x}) = f'_-(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} = \lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}.$$

**Osservazione.**

► Se esistono sia la derivata sinistra che destra di  $f$  in  $\bar{x}$  e coincidono, allora la derivata di  $f$  in  $\bar{x}$  esiste e coincide con il valore di entrambe le due derivate.

► Vale anche il viceversa, se  $\bar{x}$  è un punto di accumulazione sia destro che sinistro: se esiste la derivata di  $f$  in  $\bar{x}$ , allora sia la derivata sinistra che destra esistono e coincidono con la derivata.

**Definizione.** Si dice che  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  è derivabile se è derivabile  $\forall x \in X$ .

**Definizione.** Si dice che  $f \in \mathcal{C}^1$  se è derivabile e la sua funzione derivata è continua. In generale, si dice che  $f \in \mathcal{C}^n$  se è derivabile  $n$  volte e ogni sua derivata, fino alla  $n$ -esima, è continua. Si pone  $f \in \mathcal{C}^\infty$  se  $f$  è derivabile per un numero arbitrario di volte e ogni sua derivata è continua.

**Proposizione.** Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $\bar{x} \in X$  un punto di accumulazione di  $X$ . Allora:

- (i)  $f$  derivabile in  $\bar{x} \implies f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + o(h)$ .
- (ii) Se esiste  $a$  tale che  $f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + ah + o(h)$ , allora  $f$  è derivabile in  $\bar{x}$  e  $f'(\bar{x}) = a$ .

*Dimostrazione.* Se  $f$  è derivabile in  $\bar{x}$ , allora  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})-f'(\bar{x})h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h} - f'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) - f'(\bar{x}) = 0$ , da cui la prima tesi.

Inoltre, se esiste  $a$  come nelle ipotesi,  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah+o(h)}{h} = a + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = a + 0 = a$ , quindi  $f$  è derivabile in  $\bar{x}$  e  $f'(\bar{x}) = a$ .  $\square$

**Corollario.** Se  $f$  è derivabile in  $\bar{x}$ , allora  $f$  è anche continua in  $\bar{x}$ .

*Dimostrazione.* Infatti, poiché  $f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(x - \bar{x})$ ,  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(\bar{x}) + \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \lim_{x \rightarrow \bar{x}} o(x - \bar{x}) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(\bar{x}) = f(\bar{x})$ , e quindi  $f$  è continua in  $\bar{x}$ .  $\square$

**Proposizione.** Siano  $f_1, f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$  entrambe derivabili in  $\bar{x}$ . Allora:

- (i)  $(f_1 + f_2)'(\bar{x}) = f'_1(\bar{x}) + f'_2(\bar{x})$ ,
- (ii)  $(f_1 f_2)'(\bar{x}) = f_1(\bar{x})f'_2(\bar{x}) + f'_1(\bar{x})f_2(\bar{x})$ .

*Dimostrazione.* Poiché  $f_1$  ed  $f_2$  sono derivabili in  $\bar{x}$ , vale che:

$$f_1(\bar{x} + h) = f_1(\bar{x}) + f'_1(\bar{x})h + o(h), \quad f_2(\bar{x} + h) = f_2(\bar{x}) + f'_2(\bar{x})h + o(h).$$

(i)  $(f_1 + f_2)(\bar{x} + h) = (f_1 + f_2)(\bar{x}) + (f'_1 + f'_2)(\bar{x})h + o(h)$ . Quindi, per la proposizione precedente,  $(f_1 + f_2)'(\bar{x}) = (f'_1 + f'_2)(\bar{x}) = f'_1(\bar{x}) + f'_2(\bar{x})$ .

(ii)  $(f_1 f_2)(\bar{x} + h) = (f_1 f_2)(\bar{x}) + (f_1(\bar{x})f'_2(\bar{x}) + f'_1(\bar{x})f_2(\bar{x}))h + (f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}))o(h) + (f'_1 f'_2)(\bar{x})h^2 + (f'_1(\bar{x}) + f'_2(\bar{x}))h \cdot o(h) + o^2(h) =$   
 $\underbrace{\hspace{15em}}_{=o(h)} (f_1 f_2)(\bar{x}) + (f_1(\bar{x})f'_2(\bar{x}) + f'_1(\bar{x})f_2(\bar{x}))h + o(h)$ . Quindi, per la proposizione precedente,  $(f_1 f_2)'(\bar{x}) = f_1(\bar{x})f'_2(\bar{x}) + f'_1(\bar{x})f_2(\bar{x})$ .

□

**Proposizione.** Siano  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f$  derivabile in  $\bar{x}$  e  $g$  derivabile in  $\bar{y} := f(\bar{x})$ . Allora  $g \circ f$  è derivabile in  $\bar{x}$  e  $(g \circ f)'(\bar{x}) = f'(\bar{x})g'(\bar{y})$ .

*Dimostrazione.* Poiché  $f'(\bar{x})$  è finito,  $f(\bar{x} + h) = \bar{y} + f'(\bar{x})h + o(h)$ . Analogamente,  $g(\bar{y} + h) = g(\bar{y}) + g'(\bar{y})h + o(h)$ . Allora  $g(f(\bar{x} + h)) = g(\bar{y} + (f'(\bar{x})h + o(h))) = g(\bar{y}) + g'(\bar{y})(f'(\bar{x})h + o(h)) + o(f'(\bar{x})h + o(h)) = g(\bar{y}) + g'(\bar{y})f'(\bar{x})h + o(h) + o(f'(\bar{x})h + o(h))$ .

Si osserva che  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(f'(\bar{x})h + o(h))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(f'(\bar{x})h + o(h))}{f'(\bar{x})h + o(h)} \frac{f'(\bar{x})h + o(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(f'(\bar{x})h + o(h))}{f'(\bar{x})h + o(h)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(\bar{x})h + o(h)}{h} = 0 \cdot f'(\bar{x}) = 0$ , e quindi che  $o(f'(\bar{x})h + o(h)) = o(h)$ . Allora  $g(f(\bar{x} + h)) = g(\bar{y}) + g'(\bar{y})f'(\bar{x})h + o(h)$ , da cui si conclude che  $(g \circ f)'(\bar{x}) = g'(\bar{y})f'(\bar{x})$ . □

**Proposizione.** Sia  $f : X \rightarrow Y$  con inversa  $g : Y \rightarrow X$ . Sia  $f$  derivabile in  $\bar{x}$  con  $f'(\bar{x}) \neq 0$ . Sia  $g$  continua in  $\bar{y} = f(\bar{x})$ . Allora:

(i)  $\bar{y}$  è un punto di accumulazione di  $Y$ ,

(ii)  $g$  è derivabile in  $\bar{y}$  e  $g'(\bar{y}) = \frac{1}{f'(\bar{x})}$ .

*Dimostrazione.* Si dimostrano i due risultati separatamente.

(i) Poiché  $f$  è derivabile in  $\bar{x}$ ,  $f$  è continua in  $\bar{x}$ . Quindi per ogni intorno  $I$  di  $\bar{y}$ , esiste un intorno  $J$  di  $\bar{x}$  tale per cui  $f(I \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \subseteq J$ . Inoltre,  $I \cap X \setminus \{\bar{x}\}$  non è mai vuoto, dacché, essendo  $f$  derivabile in  $\bar{x}$ ,  $\bar{x}$  è un punto di accumulazione di  $X$ . Quindi  $J$  contiene in particolare un

immagine di  $f$  in esso, e quindi un punto di  $Y$ ; inoltre, tale punto è diverso da  $\bar{y}$  dal momento che  $f$  è iniettiva, essendo bigettiva. Quindi  $\bar{y}$  è un punto di accumulazione.

- (ii) Poiché  $f$  è derivabile in  $g(\bar{y})$ ,  $\bar{y} + h = f(g(\bar{y} + h)) = f(g(\bar{y}) + \underbrace{(g(\bar{y} + h) - g(\bar{y}))}_k) = \bar{y} + f'(\bar{x})k + o(k)$ , ossia vale che:

$$h = f'(\bar{x})k + o(k).$$

Dal momento che  $g$  è continua in  $\bar{y}$ ,  $k \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ , e quindi  $o(k) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ . Quindi, per  $h \rightarrow 0$ ,  $k \sim \frac{h}{f'(\bar{x})}$ . Si conclude dunque che  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(\bar{y}+h) - g(\bar{y})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h} = \frac{1}{f'(\bar{x})}$ .

□

**Esempio.** La continuità è necessaria nelle scorse ipotesi. Si può costruire infatti una funzione del tipo:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -(x+2) & \text{se } -2 < x \leq -1. \end{cases}$$

dove  $f'(0) = 1$ ,  $f$  è invertibile, ma la derivata di  $g$  in 0 non esiste ( $D_+g(0) = 1$ , ma  $D_-g(0) = +\infty$ ).

**Teorema.** (di Fermat) Sia  $I$  intervallo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{x}$  interno a  $I$  punto di massimo o minimo locale con  $f$  derivabile in  $\bar{x}$ , allora  $f'(\bar{x}) = 0$ .

*Dimostrazione.* Poiché  $I$  è un intervallo e  $\bar{x}$  è interno a  $I$ ,  $\bar{x}$  è sia punto di accumulazione sinistro che punto di accumulazione destro di  $I$ . Dal momento che  $f$  è derivabile in  $\bar{x}$ , esistono sia la derivata destra che la derivata sinistra in  $\bar{x}$ .

Si assuma che  $\bar{x}$  è un punto di massimo locale (altrimenti è sufficiente considerare  $g = -f$ ). Allora esiste un intorno  $J$  di  $\bar{x}$  tale per cui  $x \in J \implies f(x) - f(\bar{x}) \leq 0$ . Sia dunque  $J_+$  l'intorno destro relativo a  $J$ , e sia  $J_-$  quello sinistro.

Poiché  $\bar{x} = \inf J_+$ , esiste una successione  $\{x_n\} \subseteq J_+ \setminus \{\bar{x}\}$  tale per cui  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{x}$ . Dal momento che allora  $f$  è derivabile in  $\bar{x}$ ,  $f$  è anche continua in  $\bar{x}$ , e quindi si ricava che  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\bar{x})$ . Si osserva dunque che

$f(x_n) - f(\bar{x}) \leq 0$  e  $x_n - \bar{x} > 0 \implies \frac{f(x_n) - f(\bar{x})}{x_n - \bar{x}} \leq 0$ , da cui, per il teorema della permanenza del segno, si ricava che  $L_+ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(\bar{x})}{x_n - \bar{x}} \leq 0$ .

Allora, dal momento che  $f$  è derivabile in  $\bar{x}$  e che la derivata destra deve coincidere con la derivata classica,  $f'(\bar{x}) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(\bar{x})}{x_n - \bar{x}} = L_+ \leq 0$ .

Analogamente si ricava che  $f'(\bar{x}) \geq 0$ , e quindi che  $f'(\bar{x})$  è necessariamente pari a zero, da cui la tesi.  $\square$

**Osservazione.**

► Si può facilmente generalizzare il teorema di Fermat assumendo ipotesi più deboli. Sia infatti  $x_M$  un punto di massimo locale e sia  $f$  continua in  $x_M$ , allora, qualora esistano,  $D_+f(x_M) \leq 0$  e  $D_-f(x_M) \geq 0$ . Analogamente si estende la proposizione a  $x_m$  punto di minimo locale.

**Teorema.** (di Rolle) Sia  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f$  sia continua su  $I$ , che  $f(a) = f(b)$  e che  $f$  sia derivabile in  $[a, b]$ . Allora  $\exists \bar{x} \in (a, b)$  tale che  $f'(\bar{x}) = 0$ .

*Dimostrazione.* Per il teorema di Weierstrass  $f$  ammette un punto di massimo  $M$  e uno di minimo  $m$  in  $I$ . Se  $f(a) = M$  e  $f(b) = m$  o viceversa, la funzione  $f$  è costante in  $I$ , e quindi per ogni punto in  $(a, b)$  la derivata è nulla. Altrimenti, sicuramente uno tra il punto di massimo e quello di minimo appartiene a  $(a, b)$ . Sia  $\bar{x}$  tale punto. Allora, per il teorema di Fermat,  $f'(\bar{x}) = 0$ , da cui la tesi.  $\square$

**Teorema.** (di Cauchy) Sia  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  e siano  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue su  $I$  e derivabili in  $(a, b)$ , con  $g'$  non nulla in  $(a, b)$  e  $g(a) \neq g(b)$ . Allora  $\exists \bar{x} \in (a, b)$  tale che  $\frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ .

*Dimostrazione.* Si consideri la funzione  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $h(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) + f(a)\right)$ . Si osserva che  $h$ , essendo una somma di funzioni continue su  $I$  e derivabili in  $(a, b)$ , è anch'essa continua su  $I$  e derivabile in  $(a, b)$ . Inoltre  $h(a) = h(b) = 0$ . Quindi, per il teorema di Rolle,  $\exists \bar{x} \in (a, b) \mid h'(\bar{x}) = 0 \implies \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ , da cui la tesi.  $\square$

**Teorema.** (di Lagrange) Sia  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f$  sia continua su  $I$  e che  $f$  sia derivabile in  $(a, b)$ . Allora  $\exists \bar{x} \in (a, b)$  tale che  $f'(\bar{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , ossia tale per cui la retta tangente a  $f$  in  $\bar{x}$  è parallela alla secante che passa per  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ .

*Dimostrazione.* Si consideri  $g(x) = x$ .  $g$  è continua in  $[a, b]$  e derivabile in  $(a, b)$ , con derivata sempre non nulla in tale intervallo. Allora, per il teorema di Cauchy,  $\exists \bar{x} \in (a, b) \mid f'(\bar{x}) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ , da cui la tesi.  $\square$

**Proposizione.** Sia  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f$  sia continua su  $I$  e che  $f$  sia derivabile in  $(a, b)$ , con derivata non negativa. Allora  $f$  è crescente in  $[a, b]$ . Analogamente, se la derivata è non positiva,  $f$  è decrescente.

*Dimostrazione.* Senza perdita di generalità si dimostra il caso in cui la derivata di  $f$  in  $(a, b)$  è non negativa (altrimenti è sufficiente considerare  $g = -f$ ). Si considerino  $c < d \in I$ . Allora, per il teorema di Lagrange,  $\exists \bar{x} \in (c, d) \mid f'(c) = \frac{f(d)-f(c)}{d-c} \implies f(d) - f(c) = \underbrace{f'(\bar{x})(d-c)}_{\geq 0} \implies f(d) \geq f(c)$ , e

quindi  $f$  è crescente in  $I$ , da cui la tesi.  $\square$

**Proposizione.** Sia  $I \subset \mathbb{R}$  un intervallo e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $f$  sia derivabile in  $I$ . Allora  $f$  è convessa se e solo se la derivata è crescente.

*Dimostrazione.* Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

( $\implies$ ) Siano  $x_0, x_1 \in I$  con  $x_0 < x_1$ . Sia  $h$  positivo tale che  $x_0 < x_0+h \leq x_1$ . Allora  $x_0+h = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$  con  $\lambda = \frac{h}{x_1-x_0}$ . Allora, poiché  $f$  è convessa,  $f(x_0+h) \leq (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) \leq f(x_0) + \frac{h}{x_1-x_0}(f(x_1) - f(x_0))$ , da cui si ricava che:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Quindi, passando al limite,  $f'(x_0) \leq \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ . Analogamente si dimostra che  $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq f'(x_1)$ . Si conclude dunque che  $f'(x_1) \geq f'(x_0)$ , ossia che  $f'$  è crescente.

( $\impliedby$ ) Siano  $x_0, x_1 \in I$  con  $x_0 < x_1$ . Si considera  $x = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 \in (x_0, x_1)$  con  $0 < \lambda < 1$ . Per il teorema di Lagrange  $\exists \tilde{x}_0 \in (x_0, x)$  tale che  $f'(\tilde{x}_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ . Analogamente  $\exists \tilde{x}_1 \in (x, x_1)$  tale che  $f'(\tilde{x}_1) = \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$ . Poiché allora per ipotesi la derivata  $f'$  è crescente, si ricava che:

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

da cui si conclude che:

$$f(x) \leq (1 - \lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1),$$

ossia che vale la disuguaglianza di Jensen, e quindi che  $f$  è convessa, da cui la tesi.  $\square$

**Osservazione.**

► L'interpretazione geometrica del teorema di Cauchy, rispetto a quella di Lagrange, è leggermente più complicata. Si consideri la curva continua  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che  $\gamma(t) = (g(t), f(t))$ . Si osserva che il coefficiente della retta tangente in  $\bar{x}$  per  $\gamma$  è dato da  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{g(\bar{x}+h) - g(\bar{x})}$ , che, sotto le ipotesi del teorema di Cauchy, può essere riscritto come  $\frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})}$ . Allora, il teorema di Cauchy asserisce che esiste un punto della curva  $\gamma$  tale per cui la retta tangente alla curva in quel punto è parallela alla secante passante per  $(g(a), f(a))$  e  $(g(b), f(b))$ .

► Inoltre  $f$  è strettamente crescente in  $I$  se  $f' \geq 0$  e non esistono intervalli di punti stazionari. Analogamente se  $f' < 0$  in  $I$  e non esistono ancora tali intervalli,  $f$  è strettamente decrescente in  $I$ .

**Esercizio 1.** Si descriva un insieme  $X$  tale che i suoi unici punti di accumulazione siano  $\pm 1$ .

*Soluzione.* Si consideri  $X = \{1 + \frac{1}{n}\} \cup \{-1 - \frac{1}{n}\}$ , al variare di  $n \in \mathbb{N}$ . Sia  $J = [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$  un intorno di 1. Allora  $1 + \frac{1}{n} \in J$  per  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ , da cui si ricava che 1 è un punto di accumulazione di  $X$ ; analogamente si verifica che  $-1$  è un punto di accumulazione di  $X$ . Si consideri adesso l'intorno  $J = \left[1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right]$ . Si verifica che nessun punto di  $X$ , oltre  $1 + \frac{1}{n}$  appartiene a  $J$ , e quindi  $1 + \frac{1}{n}$  non è punto di accumulazione di  $X$ . Analogamente non lo è alcun numero della forma  $-1 - \frac{1}{n}$ .

**Esercizio 2.** Sia  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  continua in  $\bar{x}$  e sia  $a < f(\bar{x})$ . Allora esiste  $J$  intorno di  $\bar{x}$  tale che  $a < f(x) \forall x \in J \cap X \setminus \{\bar{x}\}$ .

*Soluzione.* Si consideri  $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  tale che  $g(x) = f(x) - a$ . Poiché  $g$  è una somma di funzioni continue in  $\bar{x}$ , anch'essa è continua in  $g$ . Allora, poiché  $g(\bar{x}) > 0$ , per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno  $J$  di  $\bar{x}$  tale per cui  $g(x) > 0 \forall x \in J$ , ossia tale per cui  $f(x) > a \forall x \in J$ , da cui la tesi.

**Esercizio 3.** Sia  $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$  e sia  $\bar{x}$  punto di accumulazione di  $X$ . Siano  $f_1, f_2 : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Si dimostri allora che:

- (i) se  $f_1 \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} +\infty$  e  $f_2$  è limitata inferiormente in un intorno  $J$  di  $\bar{x}$ , allora  $f_1(x) + f_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} +\infty$ ;
- (ii) se  $f_1 \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} 0$  e  $f_2$  è limitata in un intorno  $J$  di  $\bar{x}$ , allora  $f_1 f_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} 0$ ;
- (iii) se  $f_1 \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} +\infty$  ed  $f_2$  è limitata inferiormente da una costante positiva  $c$  in un intorno  $J$  di  $\bar{x}$ , allora  $f_1 f_2 \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} +\infty$ .

*Soluzione.* Si dimostrano i tre risultati separatamente.

- (i) Sia  $c$  la costante tale per cui  $f_2(x) \geq c \forall x \in J \cap X$ . Sia  $I = [a, \infty]$  un intorno di  $+\infty$ . Se  $c < 0$ , poiché  $f_1 \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} +\infty$ , esiste un intorno  $J'$  tale per cui  $f_1(J' \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \subseteq [a - c, \infty] \subseteq I$ . Sia dunque  $Z = J \cap J'$ . Allora  $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \geq a - c + c = a \forall x \in Z$ , da cui si conclude che  $(f_1 + f_2)(Z \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \subseteq I$ . Se invece  $c \geq 0$ , è sufficiente considerare un intorno  $J'$  di  $\bar{x}$  tale per cui  $f_1(J' \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \subseteq I$ , da cui  $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \geq a + c \geq a \forall x \in Z \implies (f_1 + f_2)(Z \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \subseteq I$ , da cui la tesi.
- (ii) Poiché  $f_2$  è limitata in  $J$ , esistono delle costanti finite  $a, b \in \mathbb{R}$  tali per cui  $a \leq f_2(x) \leq b \forall x \in J$ . Sia  $I = [-\varepsilon, \varepsilon]$  un intorno di  $0$ , con  $\varepsilon > 0$ . Si consideri  $c := \max\{|a|, |b|\}$ . Allora vale che  $-c \leq f_2(x) \leq c \forall x \in J$ . Poiché  $f_1 \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} 0$ , esiste un intorno  $J'$  di  $\bar{x}$  tale per cui  $f_1(J' \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \subseteq [-\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c}]$ . Si consideri ora  $Z := J \cap J'$ : vale allora che  $|(f_1 f_2)(x)| = |f_1(x) f_2(x)| \leq c \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon \forall x \in Z \cap X \setminus \{\bar{x}\}$ . Si conclude dunque che  $(f_1 f_2)(Z \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \subseteq I$ , da cui la tesi.
- (iii) Sia  $I = [a, \infty]$  un intorno di  $+\infty$ . Allora, poiché  $f_1 \xrightarrow{x \rightarrow \bar{x}} +\infty$ , esiste un intorno  $J'$  di  $\bar{x}$  tale per cui  $f_1(J' \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \subseteq [|a|, \infty] \subseteq I$ . Si consideri dunque  $Z := J \cap J'$ : vale dunque che  $(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x) \geq |a| c \geq a \forall x \in Z \cap X \setminus \{\bar{x}\}$ . Si conclude allora che  $(f_1 f_2)(Z \cap X \setminus \{\bar{x}\}) \subseteq I$ , da cui la tesi.

**Esercizio 4.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si mostri che  $f$  è continua ovunque e che  $D_+f(0) = 1$ .

*Soluzione.* Poiché somma di funzioni elementari,  $f$  è continua in  $(0, \infty)$ . Analogamente è continua in  $(-\infty, 0)$  dacché è costante in tale intervallo. Affinché allora  $f$  sia continua ovunque è sufficiente che si dimostri che è continua anche in 0. Dal momento che 0 è un punto di accumulazione sia destro che sinistro di  $\mathbb{R}$ , questo equivale a mostrare che il limite destro e sinistro di  $f$  esistono in 0 e coincidono.

Si verifica dunque che

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x + \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

dove si è impiegato il fatto che  $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$  è limitata in ogni intorno di 0 e che  $2x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ ; quindi  $f$  è continua in 0, e lo è allora ovunque.

Si computa allora la derivata destra di  $f$  in 0:

$$D_+f(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h + 2h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = 1 + \lim_{h \rightarrow 0^+} 2h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 1,$$

dove si è usato lo stesso argomento di prima per computare  $\lim_{h \rightarrow 0^+} 2h \sin\left(\frac{1}{h}\right) = 0$ .

**Teorema.** (di de l'Hopital) Siano  $I$  intervallo e  $x_0 \in I$ . Sia detto  $I' := I \setminus \{x_0\}$ . Siano  $f, g : I' \rightarrow \mathbb{R}$  derivabili tali che:

- (i) esiste  $L := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ,
- (ii)  $g' \neq 0$  in  $I'$ ,
- (iii) vale che (a)  $f(x), g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$  oppure che (b)  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \pm\infty$ .

Allora  $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} L$ .

*Dimostrazione.* Si consideri il caso (a) per  $x_0$  finito. Si ponga  $f(x_0) = g(x_0) := 0$ . Senza perdita di generalità si assuma che  $I$  sia un intorno destro di  $x_0$ . Sia  $x \in I \setminus \{x_0\}$ , da cui si ricava che  $x > x_0$ .

Si osserva che  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)} + g(x_0)$ . Per il teorema di Cauchy, esiste allora  $\tilde{x} \in (x_0, x)$ , in funzione di  $x$ , tale che  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\tilde{x})}{g'(\tilde{x})}$ . Allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\tilde{x})}{g'(\tilde{x})} = \lim_{\tilde{x} \rightarrow x_0} \frac{f'(\tilde{x})}{g'(\tilde{x})} = L$ , dove si è utilizzato che  $\tilde{x} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} x_0$  per il teorema del confronto applicato sulla relazione  $x_0 < \tilde{x} < x$ .

Si consideri ora il caso (b) per  $x_0$  finito. Siano  $x_1 > x_0$  tali che  $x_1 > x > x_0$ . Allora vale la seguente identità:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left( \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} + \frac{f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \right) \frac{g(x) - g(x_1)}{g(x)}.$$

Si osserva allora che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)}.$$

□

**Osservazione.** È essenziale che  $I$  sia un intervallo affinché il teorema di de l'Hopital sia vero.

**Proposizione.** Sia  $I$  un intervallo, sia  $x_0 \in I$  e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continua e derivabile dappertutto tranne che in  $x_0$ . Se esiste  $L := \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ , allora  $f'(x_0) = L$ .

*Dimostrazione.* Si consideri il rapporto incrementale  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ . Allora, per  $x \rightarrow x_0$ , per il teorema di de l'Hopital,  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ . □