Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

17 e 19 aprile 2023

Prodotti hermitiani, spazi euclidei e teorema spettrale

Nota. Nel corso del documento, per V si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita n e per φ un suo prodotto, hermitiano o scalare dipendentemente dal contesto.

Definizione. (prodotto hermitiano) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Una mappa $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ si dice **prodotto hermitiano** se:

(i) φ è $\mathbb{C}$-lineare nel secondo argomento, ossia se $\varphi(\underline{v}, \underline{u} + \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ e $\varphi(\underline{v}, a\underline{w}) = a\, \varphi(\underline{v}, \underline{w})$,

(ii) $\varphi(\underline{u}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{u})}$.

Definizione. (prodotto hermitiano canonico in $\mathbb{C}^n$) Si definisce **prodotto hermitiano canonico** di $\mathbb{C}^n$ il prodotto $\varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ tale per cui, detti $\underline{v} = (z_1 \cdots z_n)^\top$ e $\underline{w} = (w_1 \cdots w_n)^\top$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \overline{z_i} w_i$.

Osservazione.
▶ $\varphi(\underline{u} + \underline{w}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u} + \underline{w})} = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w})} = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u})} + \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u})} = \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + \varphi(\underline{u}, \underline{v})$, ossia φ è additiva anche nel primo argomento.
▶ $\varphi(a\underline{v}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, a\underline{v})} = \overline{a}\overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v})} = \overline{a}\, \varphi(\underline{v}, \underline{w})$.
▶ $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{v})}$, e quindi $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$.
▶ Sia $\underline{v} = \sum_{i=1}^n x_i \underline{v_i}$ e sia $\underline{w} = \sum_{i=1}^n y_i \underline{v_i}$, allora $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{x_i} y_i \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j})$.
▶ $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \iff \varphi(\underline{w}, \underline{v}) = 0$.

Proposizione. Data la forma quadratica $q : V \to \mathbb{R}$ del prodotto hermitiano φ tale che $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$, tale forma quadratica individua univocamente il prodotto hermitiano φ.

Dimostrazione. Innanzitutto si osserva che:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}}{2} + \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{w}) . \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}}{2}.$$

Si considerano allora le due identità:

$$q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v})} = 2\,\Re(\varphi(\underline{v}, \underline{w})),$$

$$q(i\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = -i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}) - \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}) = 2\,\Im(\varphi(\underline{v}, \underline{w})),$$

da cui si conclude che il prodotto φ è univocamente determinato dalla sua forma quadratica. □

Definizione. Si definisce **matrice aggiunta** di $A \in M(n, \mathbb{K})$ la matrice coniugata della trasposta di A, ossia:

$$A^* = \overline{A^\top} = \overline{A}^\top.$$

Osservazione. Per quanto riguarda la matrice aggiunta valgono le principali proprietà della matrice trasposta:

- $(A + B)^* = A^* + B^*$,
- $(AB)^* = B^* A^*$,
- $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, se A è invertibile.

Definizione. (matrice associata del prodotto hermitiano) Analogamente al caso del prodotto scalare, data una base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ si definisce come **matrice associata del prodotto hermitiano** φ la matrice $M_\mathcal{B}(\varphi) = (\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}))_{i,j=1—n}$.

Osservazione. Si osserva che, analogamente al caso del prodotto scalare, vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_\mathcal{B}^* M_\mathcal{B}(\varphi) [\underline{w}]_\mathcal{B}.$$

Proposizione. (formula del cambiamento di base per i prodotto hermitiani) Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi di V. Allora vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}'} = M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(Id_V)^* M_\mathcal{B}(\varphi) M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(Id_V).$$

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ e $\mathcal{B}' = \{\underline{w_1}, \ldots, \underline{w_n}\}$. Allora $\varphi(\underline{w_i}, \underline{w_j}) = [\underline{w_i}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)[\underline{w_j}]_{\mathcal{B}} = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id_V)^i\right)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id_V)^j = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id_V)\right)_i^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id_V)^j$, da cui si ricava l'identità desiderata. $\square$

Definizione. (radicale di un prodotto hermitiano) Analogamente al caso del prodotto scalare, si definisce il **radicale** del prodotto φ come il seguente sottospazio:

$$V^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ \forall \, \underline{w} \in V\}.$$

Proposizione. Sia $\mathcal{B}$ una base di V e φ un prodotto hermitiano. Allora $V^\perp = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi))$[1].

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ e sia $\underline{v} \in V^\perp$. Siano a_1, ..., $a_n \in \mathbb{K}$ tali che $\underline{v} = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}$. Allora, poiché $\underline{v} \in V$, $0 = \varphi(\underline{v_i}, \underline{v}) == a_1\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_1}) + \ldots + a_n\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_n}) = M_i[\underline{v}]_{\mathcal{B}}$, da cui si ricava che $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, e quindi che $V^\perp \subseteq [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi))$.

Sia ora $\underline{v} \in V$ tale che $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Allora, per ogni $\underline{w} \in V$, $\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = [\underline{w}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = [\underline{w}]_{\mathcal{B}}^* 0 = 0$, da cui si conclude che $\underline{v} \in V^\perp$, e quindi che $V^\perp \supseteq [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi))$, da cui $V^\perp = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi))$, ossia la tesi. $\square$

Osservazione. Come conseguenza della proposizione appena dimostrata, valgono le principali proprietà già viste per il prodotto scalare.

▶ $\det(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = 0 \iff V^\perp \neq \{\underline{0}\} \iff \varphi$ è degenere,
▶ Vale il teorema di Lagrange, e quindi quello di Sylvester, benché con alcune accortezze: si introduce, come nel caso di $\mathbb{R}$, il concetto di segnatura, che diventa l'invariante completo della nuova congruenza hermitiana, che ancora una volta si dimostra essere una relazione di equivalenza.

Definizione. (restrizione ai reali di uno spazio) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ con base $\mathcal{B}$. Si definisce allora lo spazio $V_{\mathbb{R}}$, detto **spazio di restrizione su** $\mathbb{R}$ di V, come uno spazio su $\mathbb{R}$ generato da $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B} \cup i\mathcal{B}$.

Esempio. Si consideri $V = \mathbb{C}^3$. Una base di $\mathbb{C}^3$ è chiaramente $\{\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3}\}$. Allora $V_{\mathbb{R}}$ sarà uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ generato dai vettori $\{\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3}, i\underline{e_1}, i\underline{e_2}, i\underline{e_3}\}$.

[1] Stavolta non è sufficiente considerare la mappa $f : V \to V^*$ tale che $f(\underline{v}) = [\underline{w} \mapsto \varphi(\underline{v}, \underline{w})]$, dal momento che f non è lineare, bensì antilineare, ossia $f(a\underline{v}) = \overline{a} f(\underline{v})$.

Osservazione. Si osserva che lo spazio di restrizione su $\mathbb{R}$ e lo spazio di partenza condividono lo stesso insieme di vettori. Infatti, $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\mathcal{B} \cup i\mathcal{B})$. Ciononostante, $\dim V_{\mathbb{R}} = 2 \dim V$, se $\dim V \in \mathbb{N}$.

Definizione. (complessificazione di uno spazio) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Si definisce allora lo **spazio complessificato** $V_{\mathbb{C}} = V \times V$ su $\mathbb{C}$ con le seguenti operazioni:

- $(\underline{v}, \underline{w}) + (\underline{v}', \underline{w}') = (\underline{v} + \underline{v}', \underline{w} + \underline{w}')$,
- $(a + bi)(\underline{v}, \underline{w}) = (a\underline{v} - b\underline{w}, a\underline{w} + b\underline{v})$.

Osservazione. La costruzione dello spazio complessificato emula in realtà la costruzione di $\mathbb{C}$ come spazio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Infatti se $z = (c, d)$, vale che $(a + bi)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, mentre si mantiene l'usuale operazione di addizione. In particolare si può identificare l'insieme $iV := V \times \{\underline{0}\}$ come V, mentre $\{\underline{0}\} \times V$ viene identificato come l'insieme degli immaginari di $V_{\mathbb{C}}$. Infine, moltiplicare per uno scalare reale un elemento di $V \times \{\underline{0}\}$ equivale a moltiplicare la sola prima componente con l'usuale operazione di moltiplicazione di V. Allora, come accade per $\mathbb{C}$, si può sostituire la notazione $(\underline{v}, \underline{w})$ con la più comoda notazione $\underline{v} + i\underline{w}$.

Osservazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base di V. Innanzitutto si osserva che $(a + bi)(\underline{v}, \underline{0}) = (a\underline{v}, b\underline{v})$. Pertanto si può concludere che $\mathcal{B} \times \{\underline{0}\}$ è una base dello spazio complessificato $V_{\mathbb{C}}$ su $\mathbb{C}$.

Infatti, se $(a_1 + b_1 i)(\underline{v_1}, \underline{0}) + \ldots + (a_n + b_n i)(\underline{v_n}, \underline{0}) = (\underline{0}, \underline{0})$, allora $(a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}, b_1\underline{v_1} + \ldots + b_n\underline{v_n}) = (\underline{0}, \underline{0})$. Poiché però $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente per ipotesi, l'ultima identità implica che $a_1 = \cdots = a_n = b_1 = \cdots = b_n = 0$, e quindi che $\mathcal{B} \times \{\underline{0}\}$ è linearmente indipendente.

Inoltre $\mathcal{B} \times \{\underline{0}\}$ genera $V_{\mathbb{C}}$. Se infatti $\underline{v} = (\underline{u}, \underline{w})$, e vale che:

$$\underline{u} = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}, \quad \underline{w} = b_1\underline{v_1} + \ldots + b_n\underline{v_n},$$

allora $\underline{v} = (a_1 + b_1 i)(\underline{v_1}, \underline{0}) + \ldots + (a_n + b_n i)(\underline{v_n}, \underline{0})$. Quindi $\dim V_{\mathbb{C}} = \dim V$.

Definizione. Sia f un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare di V spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Allora si definisce la **restrizione su** $\mathbb{R}$ di f, detta $f_{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$, in modo tale che $f_{\mathbb{R}}(\underline{v}) = f(\underline{v})$.

Osservazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base di V su $\mathbb{C}$. Sia $A = M_\mathcal{B}(f)$. Si osserva allora che, se $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup i\mathcal{B}$ e $A = A' + iA''$ con A', $A'' \in M(n, \mathbb{R})$, vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}'}(f_\mathbb{R}) = \left(\begin{array}{c|c} A' & -A'' \\ \hline A'' & A' \end{array}\right).$$

Infatti, se $f(\underline{v_i}) = (a_1 + b_1 i)\underline{v_1} + \ldots + (a_n + b_n i)\underline{v_n}$, vale che $f_\mathbb{R}(\underline{v_i}) = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n} + b_1(i\underline{v_1}) + \ldots + b_n(i\underline{v_n})$, mentre $f_\mathbb{R}(i\underline{v_i}) = if(\underline{v_i}) = -b_1\underline{v_1} + \ldots - b_n\underline{v_n} + a_1(i\underline{v_1}) + \ldots + a_n(i\underline{v_n})$.

Teorema. (di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare) Sia V uno spazio vettoriale e sia φ un suo prodotto scalare non degenere. Allora per ogni $f \in V^*$ esiste un unico $\underline{v} \in V$ tale che $f(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ $\forall\, \underline{w} \in V$.

Dimostrazione. Si consideri l'applicazione a_φ. Poiché φ non è degenere, $\operatorname{Ker} a_\varphi = V^\perp = \{\underline{0}\}$, da cui si deduce che a_φ è un isomorfismo. Quindi $\forall\, f \in V^*$ esiste un unico $\underline{v} \in V$ tale per cui $a_\varphi(\underline{v}) = f$, e dunque tale per cui $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_\varphi(\underline{v})(\underline{w}) = f(\underline{w})$ $\forall\, \underline{w} \in V$. □

Dimostrazione costruttiva. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base ortogonale di V per φ. Allora $\mathcal{B}^*$ è una base di V^*. In particolare $f = f(\underline{v_1})\underline{v_1}^* + \ldots + f(\underline{v_n})\underline{v_n}^*$. Sia $\underline{v} = \frac{f(\underline{v_1})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})}\underline{v_1} + \ldots + \frac{f(\underline{v_n})}{\varphi(\underline{v_n}, \underline{v_n})}$. Detto $\underline{w} = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}$, si deduce che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_1 f(\underline{v_1}) + \ldots + a_n f(\underline{v_n}) = f(\underline{w})$. Se esistesse $\underline{v}' \in V$ con la stessa proprietà di $\underline{v}$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v} - \underline{v}', \underline{w})$ $\forall\, \underline{w} \in V$. Si deduce dunque che $\underline{v} - \underline{v}' \in V^\perp$, contenente solo $\underline{0}$ dacché φ è non degenere; e quindi si conclude che $\underline{v} = \underline{v}'$, ossia che esiste solo un vettore con la stessa proprietà di $\underline{v}$. □

Teorema. (di rappresentazione di Riesz per il prodotto hermitiano) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ e sia φ un suo prodotto hermitiano non degenere. Allora per ogni $f \in V^*$ esiste un unico $\underline{v} \in V$ tale che $f(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ $\forall\, \underline{w} \in V$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base ortogonale di V per φ. Allora $\mathcal{B}^*$ è una base di V^*. In particolare $f = f(\underline{v_1})\underline{v_1}^* + \ldots + f(\underline{v_n})\underline{v_n}^*$. Sia $\underline{v} = \frac{\overline{f(\underline{v_1})}}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})}\underline{v_1} + \ldots + \frac{\overline{f(\underline{v_n})}}{\varphi(\underline{v_n}, \underline{v_n})}$. Detto $\underline{w} = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}$, si deduce che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_1 f(\underline{v_1}) + \ldots + a_n f(\underline{v_n}) = f(\underline{w})$. Se esistesse $\underline{v}' \in V$ con la stessa proprietà di $\underline{v}$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v} - \underline{v}', \underline{w})$ $\forall\, \underline{w} \in V$. Si deduce dunque che $\underline{v} - \underline{v}' \in V^\perp$, contenente solo $\underline{0}$ dacché φ è non degenere; e quindi si conclude che $\underline{v} = \underline{v}'$, ossia che esiste solo un vettore con la stessa proprietà di $\underline{v}$. $\square$

Proposizione. Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare φ non degenere. Sia $f \in \mathrm{End}(V)$. Allora esiste un unico endomorfismo $g : V \to V$, detto il **trasposto di** f e indicato con $f^\top$ in assenza di ambiguità[2], tale che:

$$a_\varphi \circ g = f^\top \circ a_\varphi,$$

ossia che:

$$\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(g(\underline{v}), \underline{w}) \;\forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

Dimostrazione. Si consideri $(f^\top \circ a_\varphi)(\underline{v}) \in V^*$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare, esiste un unico $\underline{v}'$ tale che $(f^\top \circ a_\varphi)(\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \;\forall\, \underline{w} \in V$. Si costruisce allora una mappa $g : V \to V$ che associa a $\underline{v}$ tale $\underline{v}'$. Si dimostra che g è un'applicazione lineare, e che dunque è un endomorfismo:

(i) Siano $\underline{v_1}$, $\underline{v_2} \in V$. Si deve dimostrare innanzitutto che $g(\underline{v_1} + \underline{v_2}) = g(\underline{v_1}) + g(\underline{v_2})$, ossia che $\varphi(g(\underline{v_1}) + g(\underline{v_2}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v_1} + \underline{v_2}, f(\underline{w})) \;\forall\, \underline{w} \in V$.

    Si osservano le seguenti identità:

$$\varphi(\underline{v_1} + \underline{v_2}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v_1}, f(\underline{w})) + \varphi(\underline{v_2}, f(\underline{w})) = (*),$$
$$\varphi(g(\underline{v_1}) + g(\underline{v_2}), \underline{w}) = \varphi(g(\underline{v_1}), \underline{w}) + \varphi(g(\underline{v_2}), \underline{w}) = (*),$$

    da cui si deduce l'uguaglianza desiderata, essendo $g(\underline{v_1} + \underline{v_2})$ l'unico vettore di V con la proprietà enunciata dal teorema di rappresentazione di Riesz.

(ii) Sia $\underline{v} \in V$. Si deve dimostrare che $g(a\underline{v}) = ag(\underline{v})$, ossia che $\varphi(ag(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(a\underline{v}, f(\underline{w})) \;\forall\, a \in \mathbb{K}$, $\underline{w} \in V$. Se $a = 0$, l'uguaglianza è ovvia; altrimenti è sufficiente moltiplicare per a l'identità $\varphi(g(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$. Analogamente a prima, si deduce che $g(a\underline{v}) = ag(\underline{v})$, essendo $g(a\underline{v})$ l'unico vettore di V con la proprietà enunciata dal teorema di rappresentazione di Riesz.

[2] Si tenga infatti in conto della differenza tra $f^\top : V \to V$, di cui si discute nell'enunciato, e $f^\top : V^* \to V^*$ che invece è tale che $f^top(g) = g \circ f$.

Infine si dimostra che g è unico. Sia infatti g' un endomorfismo di V che condivide la stessa proprietà di g. Allora $\varphi(g(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(g'(\underline{v}), \underline{w})$ $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, da cui si deduce che $\varphi(g(\underline{v}) - g'(\underline{v}), \underline{w}) = 0 \ \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, ossia che $g(\underline{v}) - g'(\underline{v}) \in V^\perp \ \forall \underline{v} \in V$. Tuttavia φ è non degenere, e quindi $V^\perp = \{\underline{0}\}$, da cui si deduce che deve valere l'identità $g(\underline{v}) = g'(\underline{v}) \ \forall \underline{v} \in V$, ossia $g = g'$. □

Proposizione. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ e sia φ un suo prodotto hermitiano. Allora esiste un'unica mappa[3] $f^* : V \to V$, detta **aggiunto di** f, tale che $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) \ \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$.

Dimostrazione. Sia $\underline{v} \in V$. Si consideri il funzionale σ tale che $\sigma(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare esiste un unico $\underline{v}' \in V$ tale per cui $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \sigma(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w})$. Si costruisce allora una mappa f^* che associa $\underline{v}$ a tale $\underline{v}'$.

Si dimostra infine che la mappa f^* è unica. Sia infatti $\mu : V \to V$ che condivide la stessa proprietà di f^*. Allora $\varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\mu(\underline{v}), \underline{w}) \ \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, da cui si deduce che $\varphi(f^*(\underline{v}) - \mu(\underline{v}), \underline{w}) = 0 \ \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, ossia che $f^*(\underline{v}) - \mu(\underline{v}) \in V^\perp \ \forall \underline{v} \in V$. Tuttavia φ è non degenere, e quindi $V^\perp = \{\underline{0}\}$, da cui si deduce che deve valere l'identità $f^*(\underline{v}) = \mu(\underline{v})$ $\forall \underline{v} \in V$, ossia $f^* = \mu$. □

Osservazione. L'operazione di trasposizione di un endomorfismo sul prodotto scalare non degenere φ è un'involuzione. Infatti valgono le seguenti identità $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$:

$$\begin{cases} \varphi(\underline{w}, f^\top(\underline{v})) = \varphi(f^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})), \\ \varphi(\underline{w}, f^\top(\underline{v})) = \varphi((f^\top)^\top(\underline{w}), \underline{v}) = \varphi(\underline{v}, (f^\top)^\top(\underline{w})). \end{cases}$$

Si conclude allora, poiché φ è non degenere, che $f(\underline{w}) = (f^\top)^\top(\underline{w}) \ \forall \underline{w} \in V$, ossia che $f = (f^\top)^\top$.

Osservazione. Analogamente si può dire per l'operazione di aggiunta per un prodotto hermitiano φ non degenere. Valgono infatti le seguenti identità $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$:

$$\begin{cases} \overline{\varphi(\underline{w}, f^*(\underline{v}))} = \varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})), \\ \overline{\varphi(\underline{w}, f^*(\underline{v}))} = \overline{\varphi((f^*)^*(\underline{w}), \underline{v})} = \varphi(\underline{v}, (f^*)^*(\underline{w})), \end{cases}$$

da cui si deduce, come prima, che $f = (f^*)^*$.

[3] Si osservi che f^* non è un'applicazione lineare, benché sia invece *antilineare*.

Nota. D'ora in poi, nel corso del documento, s'intenderà per φ un prodotto scalare (o eventualmente hermitiano) non degenere di V.

Definizione. (operatori simmetrici) Sia $f \in \mathrm{End}(V)$. Si dice allora che f è **simmetrico** se $f = f^\top$.

Definizione. (applicazioni e matrici ortogonali) Sia $f \in \mathrm{End}(V)$. Si dice allora che f è **ortogonale** se $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$. Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$. Si dice dunque che A è **ortogonale** se $A^\top A = AA^\top = I_n$.

Definizione. Le matrici ortogonali di $M(n, \mathbb{K})$ formano un sottogruppo moltiplicativo di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$, detto **gruppo ortogonale**, e indicato con O_n. Il sottogruppo di O_n contenente solo le matrici con determinante pari a 1 è detto **gruppo ortogonale speciale**, e si denota con SO_n.

Osservazione. Si possono classificare in modo semplice alcuni di questi gruppi ortogonali per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

▶ $A \in O_n \implies 1 = \det(I_n) = \det(AA^\top) = \det(A)^2 \implies \det(A) = \pm 1$.
▶ $A = (a) \in O_1 \iff A^\top A = I_1 \iff a^2 = 1 \iff a = \pm 1$, da cui si ricava che l'unica matrice di SO_1 è (1). Si osserva inoltre che O_1 è abeliano di ordine 2, e quindi che $O_1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
▶ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2 \iff \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+cd \\ ab+cd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = A^\top A = I_2 \iff$
$\begin{cases} a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1, \\ ab+cd = 0. \end{cases}$

Si ricava pertanto che si può identificare A con le funzioni trigonometriche $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$ nelle due forme:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad (\det(A) = 1, A \in SO_2),$$
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad (\det(A) = -1).$$

Definizione. (applicazioni e matrici hermitiane) Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ e si consideri il prodotto hermitiano φ. Si dice allora che f è **hermitiano** se $f = f^*$. Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$. Si dice dunque che A è **hermitiana** se $A = A^*$.

Definizione. (applicazioni e matrici unitarie) Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ e si consideri il prodotto hermitiano φ. Si dice allora che f è **unitario** se $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$. Sia $A \in M(n, \mathbb{C})$. Si dice dunque che A è **unitaria** se $A^*A = AA^* = I_n$.

Definizione. Le matrici unitarie di $M(n,\mathbb{C})$ formano un sottogruppo moltiplicativo di $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, detto **gruppo unitario**, e indicato con U_n. Il sottogruppo di U_n contenente solo le matrici con determinante pari a 1 è detto **gruppo unitario speciale**, e si denota con SU_n.

Osservazione.
▶ $A \in U_n \implies 1 = \det(I_n) = \det(AA^*) = \det(A)\overline{\det(A)} = |\det(A)|^2 = 1.$
▶ $A = (a) \in U_1 \iff A^*A = I_1 \iff |a|^2 = 1 \iff a = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$, ossia il numero complesso a appartiene alla circonferenza di raggio unitario.

Definizione. (spazio euclideo reale) Si definisce **spazio euclideo reale** uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ dotato del prodotto scalare standard $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definizione. (spazio euclideo complesso) Si definisce **spazio euclideo complesso** uno spazio vettoriale V su $\mathbb{C}$ dotato del prodotto scalare standard $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definizione. (base ortonormale) Si definisce **base ortonormale** di uno spazio vettoriale V su un suo prodotto φ una base ortogonale $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ tale che $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \delta_{ij}$.

Proposizione. Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale e sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V. Allora $f \in \mathrm{End}(V)$ è simmetrico $\iff M_\mathcal{B}(f) = M_\mathcal{B}(f)^\top \iff M_\mathcal{B}(f)$ è simmetrica.

Dimostrazione. Si osserva che $M_\mathcal{B}(\varphi) = I_n$. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$. Se f è simmetrico, allora $[\underline{v}]_\mathcal{B}^\top M_\mathcal{B}(f)[\underline{w}]_\mathcal{B} = [\underline{v}]_\mathcal{B}^\top M_\mathcal{B}(\varphi)(M_\mathcal{B}(f)[\underline{w}]_\mathcal{B}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = (M_\mathcal{B}(f)[\underline{v}]_\mathcal{B})^\top M_\mathcal{B}(\varphi)[\underline{w}]_\mathcal{B} = [\underline{v}]_\mathcal{B}^\top M_\mathcal{B}(f)^\top [\underline{w}]_\mathcal{B}$.
In particolare, $M_\mathcal{B}(f)_{ij}^\top = [\underline{v_i}]_\mathcal{B}^\top M_\mathcal{B}(f)^\top [\underline{v_j}]_\mathcal{B} = [\underline{v_i}]_\mathcal{B}^\top M_\mathcal{B}(f)[\underline{v_j}]_\mathcal{B} = M_\mathcal{B}(f)_{ij}$, e quindi $M_\mathcal{B}(f)^\top = M_\mathcal{B}(f)$.

Se invece $M_\mathcal{B}(f)^\top = M_\mathcal{B}(f)$, $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = [\underline{v}]_\mathcal{B}^\top M_\mathcal{B}(\varphi)(M_\mathcal{B}(f)[\underline{w}]_\mathcal{B}) = [\underline{v}]_\mathcal{B}^\top M_\mathcal{B}(f)[\underline{w}]_\mathcal{B} = [\underline{v}]_\mathcal{B}^\top M_\mathcal{B}(f)^\top [\underline{w}]_\mathcal{B} = (M_\mathcal{B}(f)[\underline{v}]_\mathcal{B})^\top [\underline{w}]_\mathcal{B} = (M_\mathcal{B}(f)[\underline{v}]_\mathcal{B})^\top M_\mathcal{B}(\varphi)[\underline{w}]_\mathcal{B} = \varphi(f(\underline{v}), \underline{w})$, e quindi f è simmetrico. □

Proposizione. Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale e sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V. Allora $f \in \mathrm{End}(V)$ è ortogonale $\iff M_\mathcal{B}(f)M_\mathcal{B}(f)^\top = M_\mathcal{B}(f)^\top M_\mathcal{B}(f) = I_n \overset{\text{def}}{\iff} M_\mathcal{B}(f)$ è ortogonale.

Dimostrazione. Si osserva che $M_\mathcal{B}(\varphi) = I_n$. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$. Se f è ortogonale, allora $[\underline{v}]_\mathcal{B}^\top [\underline{w}]_\mathcal{B} = [\underline{v}]_\mathcal{B}^\top M_\mathcal{B}(\varphi)[\underline{w}]_\mathcal{B} = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = (M_\mathcal{B}(f)[\underline{v}]_\mathcal{B})^\top M_\mathcal{B}(\varphi)(M_\mathcal{B}(f)[\underline{w}]_\mathcal{B}) = [\underline{v}]_\mathcal{B}^\top M_\mathcal{B}(f)^\top M_\mathcal{B}(\varphi)M_\mathcal{B}(f)[\underline{w}]_\mathcal{B} =$

$[\underline{v}]_{\mathcal{B}}^\top M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}$. Allora, come visto nella proposizione precedente, si ricava che $M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(f) = I_n$. Dal momento che gli inversi sinistri sono anche inversi destri, $M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^\top = I_n$.

Se invece $M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^\top = I_n$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^\top [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^\top M_{\mathcal{B}}(f)^\top M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v}]_{\mathcal{B}})^\top (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v}]_{\mathcal{B}})^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi)(M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$, e quindi f è ortogonale. $\square$

Proposizione. Sia (V, φ) uno spazio euclideo complesso e sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V. Allora $f \in \operatorname{End}(V)$ è hermitiano $\iff M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f)^*$ $\overset{\text{def}}{\iff} M_{\mathcal{B}}(f)$ è hermitiana.

Dimostrazione. Si osserva che $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$. Se f è hermitiano, allora $[\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)(M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v}]_{\mathcal{B}})^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)[\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^*[\underline{w}]_{\mathcal{B}}$. Allora, come visto nella proposizione precedente, si ricava che $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f)^*$.
Se invece $M_{\mathcal{B}}(f)^* = M_{\mathcal{B}}(f)$, $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)(M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^*[\underline{w}]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v}]_{\mathcal{B}})^*[\underline{w}]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v}]_{\mathcal{B}})^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)[\underline{w}]_{\mathcal{B}} = \varphi(f(\underline{v}), \underline{w})$, e quindi f è hermitiano. $\square$

Proposizione. Sia (V, φ) uno spazio euclideo complesso e sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V. Allora $f \in \operatorname{End}(V)$ è unitario $\iff M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^* = M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) = I_n \overset{\text{def}}{\iff} M_{\mathcal{B}}(f)$ è unitaria.

Dimostrazione. Si osserva che $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$. Se f è unitario, allora $[\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)[\underline{w}]_{\mathcal{B}} = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v}]_{\mathcal{B}})^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)(M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}$. Allora, come visto nella proposizione precedente, si ricava che $M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) = I_n$. Dal momento che gli inversi sinistri sono anche inversi destri, $M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^* = I_n$.

Se invece $M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^* = I_n$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v}]_{\mathcal{B}})^* (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = (M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{v}]_{\mathcal{B}})^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)(M_{\mathcal{B}}(f)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$, e quindi f è unitario. $\square$

Proposizione. Sia $V = \mathbb{R}^n$ uno spazio vettoriale col prodotto scalare standard φ. Allora sono equivalenti i seguenti fatti:

(i) $A \in O_n$,

(ii) f_A è un operatore ortogonale,

(iii) le colonne e le righe di A formano una base ortonormale di V.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di V. Allora $M_\mathcal{B}(f_A) = A$, e quindi, per una proposizione precedente, f_A è un operatore ortogonale. Viceversa si deduce che se f_A è un operatore ortogonale, $A \in O_n$. Dunque è sufficiente dimostrare che $A \in O_n \iff$ le colonne e le righe di A formano una base ortonormale di V.

($\implies$) Se $A \in O_n$, in particolare $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, e quindi A è invertibile. Allora le sue colonne e le sue righe formano già una base di V, essendo n vettori di V linearmente indipendenti. Inoltre, poiché $A \in O_n$, $\varphi(\underline{e_i}, \underline{e_j}) = \varphi(A\underline{e_i}, A\underline{e_j})$, e quindi le colonne di A si mantengono a due a due ortogonali tra di loro, mentre $\varphi(A\underline{e_i}, A\underline{e_i}) = \varphi(\underline{e_i}, \underline{e_i}) = 1$. Pertanto le colonne di A formano una base ortonormale di V.

Si osserva che anche $A^\top \in O_n$. Allora le righe di A, che non sono altro che le colonne di $A^\top$, formano anch'esse una base ortonormale di V.

($\impliedby$) Nel moltiplicare $A^\top$ con A altro non si sta facendo che calcolare il prodotto scalare φ tra ogni riga di $A^\top$ e ogni colonna di A , ossia $(A^*A)_{ij} = \varphi((A^\top)_i, A^j) = \varphi(A^i, A^j) = \delta_{ij}$. Quindi $A^\top A = AA^\top = I_n$, da cui si deduce che $A \in O_n$. □

Proposizione. Sia $V = \mathbb{C}^n$ uno spazio vettoriale col prodotto hermitiano standard φ. Allora sono equivalenti i seguenti fatti:

(i) $A \in U_n$,

(ii) f_A è un operatore unitario,

(iii) le colonne e le righe di A formano una base ortonormale di V.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ la base canonica di V. Allora $M_\mathcal{B}(f_A) = A$, e quindi, per una proposizione precedente, f_A è un operatore unitario. Viceversa si deduce che se f_A è un operatore unitario, $A \in U_n$. Dunque è sufficiente dimostrare che $A \in U_n \iff$ le colonne e le righe di A formano una base ortonormale di V.

($\Longrightarrow$) Se $A \in U_n$, in particolare $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, e quindi A è invertibile. Allora le sue colonne e le sue righe formano già una base di V, essendo n vettori di V linearmente indipendenti. Inoltre, poiché $A \in U_n$, $\varphi(\underline{e_i}, \underline{e_j}) = \varphi(A\underline{e_i}, A\underline{e_j})$, e quindi le colonne di A si mantengono a due a due ortogonali tra di loro, mentre $\varphi(A\underline{e_i}, A\underline{e_i}) = \varphi(\underline{e_i}, \underline{e_i}) = 1$. Pertanto le colonne di A formano una base ortonormale di V.

Si osserva che anche $A^\top \in U_n$. Allora le righe di A, che non sono altro che le colonne di $A^\top$, formano anch'esse una base ortonormale di V.

($\Longleftarrow$) Nel moltiplicare A^* con A altro non si sta facendo che calcolare il prodotto hermitiano φ tra ogni riga coniugata di A^* e ogni colonna di A, ossia $(A^*A)_{ij} = \varphi((A^\top)_i, A^j) = \varphi(A^i, A^j) = \delta_{ij}$. Quindi $A^*A = AA^* = I_n$, da cui si deduce che $A \in U_n$. $\square$

Nota. D'ora in poi, qualora non specificato diversamente, si assumerà che V sia uno spazio euclideo, reale o complesso.

Definizione. (norma) Sia (V, φ) un qualunque spazio euclideo. Si definisce **norma** la mappa $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ tale che $\|\underline{v}\| = \sqrt{\varphi(\underline{v}, \underline{v})}$.

Definizione. (distanza tra due vettori) Sia (V, φ) un qualunque spazio euclideo. Si definisce **distanza** la mappa $d : V \times V \to \mathbb{R}^+$ tale che $d(\underline{v}, \underline{w}) = \|\underline{v} - \underline{w}\|$.

Osservazione.
▶ Si osserva che in effetti $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}^+ \ \forall \, \underline{v} \in V$. Infatti, sia per il caso reale che per il caso complesso, φ è definito positivo.
▶ Vale che $\|\underline{v}\| = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$. Infatti, se $\underline{v} = \underline{0}$, chiaramente $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0 \implies \|\underline{v}\| = 0$; se invece $\|\underline{v}\| = 0$, $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$, e quindi $\underline{v} = \underline{0}$, dacché $V^\perp = \{\underline{0}\}$, essendo φ definito positivo.
▶ Inoltre, vale chiaramente che $\|\alpha\underline{v}\| = |\alpha| \, \|\underline{v}\|$.

Proposizione. (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) Vale che $\|\underline{v}\| \, \|\underline{w}\| \geq |\varphi(\underline{v}, \underline{w})|$, $\forall \, \underline{v}$, $\underline{w} \in V$, dove l'uguaglianza è raggiunta soltanto se $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. Si consideri innanzitutto il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, e quindi il caso in cui φ è il prodotto scalare standard. Siano $\underline{v}$, $\underline{w} \in V$. Si consideri la disuguaglianza $\|\underline{v} + t\underline{w}\|^2 \geq 0$, valida per ogni elemento di V. Allora

$\|\underline{v}+t\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2\varphi(\underline{v},\underline{w})t + \|\underline{w}\|^2 t^2 \geq 0$. L'ultima disuguaglianza è possibile se e solo se $\frac{\Delta}{4} \leq 0$, e quindi se e solo se $\varphi(\underline{v},\underline{w})^2 - \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 \leq 0 \iff \|\underline{v}\| \|\underline{w}\| \geq \varphi(\underline{v},\underline{w})$. Vale in particolare l'equivalenza se e solo se $\|\underline{v}+t\underline{w}\| = 0$, ossia se $\underline{v}+t\underline{w} = \underline{0}$, da cui la tesi.

Si consideri ora il caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e dunque il caso in cui φ è il prodotto hermitiano standard. Siano $\underline{v}$, $\underline{w} \in V$, e siano α, $\beta \in \mathbb{C}$. Si consideri allora la disuguaglianza $\|\alpha\underline{v}+\beta\underline{w}\|^2 \geq 0$, valida per ogni elemento di V. Allora $\|\alpha\underline{v}+\beta\underline{w}\|^2 = \|\alpha\underline{v}\|^2 + \varphi(\alpha\underline{v},\beta\underline{w}) + \varphi(\beta\underline{w},\alpha\underline{v}) + \|\beta\underline{w}\|^2 = |\alpha|^2 \|\underline{v}\|^2 + \overline{\alpha}\beta\,\varphi(\underline{v},\underline{w}) + \overline{\overline{\alpha}\beta\,\varphi(\underline{v},\underline{w})} + |\beta|^2 \|\underline{w}\|^2 \geq 0$. Ponendo allora $\alpha = \|\underline{w}\|^2$ e $\beta = -\varphi(\underline{w},\underline{v}) = -\overline{\varphi(\underline{v},\underline{w})}$, si deduce che:

$$\|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^4 - \|\underline{w}\|^2 |\varphi(\underline{v},\underline{w})| \geq 0.$$

Se $\underline{w} = \underline{0}$, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz è già dimostrata. Altrimenti, è sufficiente dividere per $\|\underline{w}\|^2$ (dal momento che $\underline{w} \neq \underline{0} \iff \|\underline{w}\| \neq 0$) per ottenere la tesi. Come prima, is osserva che l'uguaglianza si ottiene se e solo se $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente dipendenti. $\square$

Proposizione. (disuguaglianza triangolare) $\|\underline{v}+\underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|$.

Dimostrazione. Si osserva che $\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \varphi(\underline{v},\underline{w}) + \varphi(\underline{w},\underline{v}) + \|\underline{w}\|^2$. Se φ è il prodotto scalare standard, si ricava che:

$$\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2\varphi(\underline{v},\underline{w}) + \|\underline{w}\|^2 \leq \|\underline{v}\|^2 + 2\|\underline{v}\|\|\underline{w}\| + \|\underline{w}\|^2 = (\|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|)^2,$$

dove si è utilizzata la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Da quest'ultima disuguaglianza si ricava, prendendo la radice quadrata, la disuguaglianza desiderata.

Se invece φ è il prodotto hermitiano standard, $\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2\,\Re(\varphi(\underline{v},\underline{w})) + \|\underline{w}\|^2 \leq \|\underline{v}\|^2 + 2\,|\varphi(\underline{v},\underline{w})| + \|\underline{w}\|^2$. Allora, riapplicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ottiene che:

$$\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 \leq (\|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|)^2,$$

da cui, come prima, si ottiene la disuguaglianza desiderata. $\square$

Osservazione. Utilizzando il concetto di norma euclidea, si possono ricavare due teoremi fondamentali della geometria, e già noti dalla geometria euclidea.

▶ Se $\underline{v} \perp \underline{w}$, allora $\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \overbrace{(\varphi(\underline{v},\underline{w}) + \varphi(\underline{w},\underline{v}))}^{=0} + \|\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2$ (teorema di Pitagora),
▶ Se $\|\underline{v}\| = \|\underline{w}\|$ e φ è un prodotto scalare, allora $\varphi(\underline{v}+\underline{w}, \underline{v}-\underline{w}) = \|\underline{v}\|^2 - \varphi(\underline{v},\underline{w}) + \varphi(\underline{w},\underline{v}) - \|\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 - \|\underline{w}\|^2 = 0$, e quindi $\underline{v}+\underline{w} \perp \underline{v}-\underline{w}$ (le diagonali di un rombo sono ortogonali tra loro).

Osservazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ è una base ortogonale di V per φ.

▶ Se $\underline{v} = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}$, con a_1, ..., $a_n \in \mathbb{K}$, si osserva che $\varphi(\underline{v}, \underline{v_i}) = a_i\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_i})$. Quindi $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(\underline{v},\underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_i},\underline{v_i})}\, \underline{v_i}$. In particolare, $\frac{\varphi(\underline{v},\underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_i},\underline{v_i})}$ è detto **coefficiente di Fourier** di $\underline{v}$ rispetto a $\underline{v_i}$, e si indica con $C(\underline{v}, \underline{v_i})$. Se $\mathcal{B}$ è ortonormale, $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \varphi(\underline{v}, \underline{v_i})\, \underline{v_i}$.
▶ Quindi $\|\underline{v}\|^2 = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(\underline{v},\underline{v_i})^2}{\varphi(\underline{v_i},\underline{v_i})}$. In particolare, se $\mathcal{B}$ è ortonormale, $\|\underline{v}\|^2 = \sum_{i=1}^n \varphi(\underline{v}, \underline{v_i})^2$. In tal caso, si può esprimere la disuguaglianza di Bessel: $\|\underline{v}\|^2 \geq \sum_{i=1}^k \varphi(\underline{v}, \underline{v_i})^2$ per $k \leq n$.

Osservazione. (algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt) Se φ è non degenere (o in generale, se $\mathrm{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$) ed è data una base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ per V (dove si ricorda che deve valere $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$), è possibile applicare l'**algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt** per ottenere da $\mathcal{B}$ una nuova base $\mathcal{B}' = \{\underline{v_1}', \ldots, \underline{v_n}'\}$ con le seguenti proprietà:

(i) $\mathcal{B}'$ è una base ortogonale,

(ii) $\mathcal{B}'$ mantiene la stessa bandiera di $\mathcal{B}$ (ossia $\mathrm{Span}(\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_i}) = \mathrm{Span}(\underline{v_1}', \ldots, \underline{v_i}')$ per ogni $1 \leq i \leq n$).

L'algoritmo si applica nel seguente modo: si prenda in considerazione $\underline{v_1}$ e sottragga ad ogni altro vettore della base il vettore $C(\underline{v_1}, \underline{v_i})\underline{v_1} = \frac{\varphi(\underline{v_1},\underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_1},\underline{v_1})}\underline{v_1}$, rendendo ortogonale ogni altro vettore della base con $\underline{v_1}$. Pertanto si applica la mappa $\underline{v_i} \mapsto \underline{v_i} - \frac{\varphi(\underline{v_1},\underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_1},\underline{v_1})}\underline{v_i} = \underline{v_i}^{(1)}$. Si verifica infatti che $\underline{v_1}$ e $\underline{v_i}^{(1)}$ sono ortogonali per $2 \leq i \leq n$:

$$\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}^{(1)}) = \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) - \varphi\left(\underline{v_1}, \frac{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})}\underline{v_i}\right) = \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) - \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) = 0.$$

Poiché $\underline{v_1}$ non è isotropo, si deduce la decomposizione $V = \mathrm{Span}(\underline{v_1}) \oplus \mathrm{Span}(\underline{v_1})^\perp$. In particolare $\dim \mathrm{Span}(\underline{v_1})^\perp = n-1$: essendo allora i vettori

$\underline{v_2}^{(1)}, \ldots, \underline{v_n}^{(1)}$ linearmente indipendenti e appartenenti a $\mathrm{Span}(\underline{v_1})^\perp$, ne sono una base. Si conclude quindi che vale la seguente decomposizione:

$$V = \mathrm{Span}(\underline{v_1}) \oplus^\perp \mathrm{Span}(\underline{v_2}^{(1)}, \ldots, \underline{v_n}^{(1)}).$$

Si riapplica dunque l'algoritmo di Gram-Schmidt prendendo come spazio vettoriale lo spazio generato dai vettori a cui si è applicato precedentemente l'algoritmo, ossia $V' = \mathrm{Span}(\underline{v_2}^{(1)}, \ldots, \underline{v_n}^{(1)})$, fino a che non si ottiene $V' = \{\underline{0}\}$.

Si può addirittura ottenere una base ortonormale a partire da $\mathcal{B}'$ normalizzando ogni vettore (ossia dividendo per la propria norma), se si sta considerando uno spazio euclideo.

Osservazione. Poiché la base ottenuta tramite Gram-Schmidt mantiene la stessa bandiera della base di partenza, ogni matrice triangolabile è anche triangolabile mediante una base ortogonale.

Esempio. Si consideri $V = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot \rangle)$, ossia di $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard, e si applichi l'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt sulla seguente base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v_1} = \underline{e_1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v_2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{v_3}} \right\}$$

Alla prima iterazione dell'algoritmo si ottengono i seguenti vettori:

- $\underline{v_2}^{(1)} = \underline{v_2} - \frac{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_2})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})} \underline{v_1} = \underline{v_2} - \underline{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e_2}$,
- $\underline{v_3}^{(1)} = \underline{v_3} - \frac{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_3})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})} \underline{v_1} = \underline{v_3} - \underline{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si considera ora $V' = \mathrm{Span}(\underline{v_2}^{(1)}, \underline{v_3}^{(1)})$. Alla seconda iterazione dell'algoritmo si ottiene allora il seguente vettore:

- $\underline{v_3}^{(2)} = \underline{v_3}^{(1)} - \frac{\varphi(\underline{v_2}^{(1)}, \underline{v_3}^{(1)})}{\varphi(\underline{v_2}^{(1)}, \underline{v_2}^{(1)})} \underline{v_2}^{(1)} = \underline{v_3}^{(1)} - \underline{v_2}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e_3}$.

Quindi la base ottenuta è $\mathcal{B}' = \{\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3}\}$, ossia la base canonica di $\mathbb{R}^3$, già ortonormale.