Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

17 e 19 aprile 2023

Prodotti hermitiani e teorema spettrale

Nota. Nel corso del documento, per V si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita n e per φ un suo prodotto, hermitiano o scalare dipendentemente dal contesto.

Definizione. (prodotto hermitiano) Sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Una mappa $\varphi : V \times V \to \mathbb{C}$ si dice **prodotto hermitiano** se:

(i) φ è $\mathbb{C}$-lineare nel secondo argomento, ossia se $\varphi(\underline{v}, \underline{u} + \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ e $\varphi(\underline{v}, a\underline{w}) = a\,\varphi(\underline{v}, \underline{w})$,

(ii) $\varphi(\underline{u}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{u})}$.

Definizione. (prodotto hermitiano canonico in $\mathbb{C}^n$) Si definisce **prodotto hermitiano canonico** di $\mathbb{C}^n$ il prodotto $\varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ tale per cui, detti $\underline{v} = (z_1 \cdots z_n)^\top$ e $\underline{w} = (w_1 \cdots w_n)^\top$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \overline{z_i} w_i$.

Osservazione.
▶ $\varphi(\underline{u} + \underline{w}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u} + \underline{w})} = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w})} = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u})} + \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u})} = \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + \varphi(\underline{u}, \underline{v})$, ossia φ è additiva anche nel primo argomento.
▶ $\varphi(a\underline{v}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, a\underline{v})} = \overline{a}\overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v})} = \overline{a}\,\varphi(\underline{v}, \underline{w})$.
▶ $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{v})}$, e quindi $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$.
▶ Sia $\underline{v} = \sum_{i=1}^n x_i \underline{v_i}$ e sia $\underline{w} = \sum_{i=1}^n y_i \underline{v_i}$, allora $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{x_i} y_i \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j})$.
▶ $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \iff \varphi(\underline{w}, \underline{v}) = 0$.

Proposizione. Data la forma quadratica $q : V \to \mathbb{R}$ del prodotto hermitiano φ tale che $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$, tale forma quadratica individua univocamente il prodotto hermitiano φ.

Dimostrazione. Innanzitutto si osserva che:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}}{2} + \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{w}).\overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}}{2}.$$

Si considerano allora le due identità:

$$q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v})} = 2\,\Re(\varphi(\underline{v}, \underline{w})),$$

$$q(i\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = -i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}) - \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}) = 2\,\Im(\varphi(\underline{v}, \underline{w})),$$

da cui si conclude che il prodotto φ è univocamente determinato dalla sua forma quadratica. $\square$

Definizione. Si definisce **matrice aggiunta** di $A \in M(n, \mathbb{K})$ la matrice coniugata della trasposta di A, ossia:

$$A^* = \overline{A^\top} = \overline{A}^\top.$$

Osservazione. Per quanto riguarda la matrice aggiunta valgono le principali proprietà della matrice trasposta:

- $(A + B)^* = A^* + B^*$,
- $(AB)^* = B^* A^*$.

Definizione. (matrice associata del prodotto hermitiano) Analogamente al caso del prodotto scalare, data una base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ si definisce come **matrice associata del prodotto hermitiano** φ la matrice $M_\mathcal{B}(\varphi) = (\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}))_{i,j=1—n}$.

Osservazione. Si osserva che, analogamente al caso del prodotto scalare, vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_\mathcal{B}^* M_\mathcal{B}(\varphi)[\underline{w}]_\mathcal{B}.$$

Proposizione. (formula del cambiamento di base per i prodotto hermitiani) Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi di V. Allora vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}'} = M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(Id_V)^* M_\mathcal{B}(\varphi) M_\mathcal{B}^{\mathcal{B}'}(Id_V).$$

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ e $\mathcal{B}' = \{\underline{w_1}, \ldots, \underline{w_n}\}$. Allora $\varphi(\underline{w_i}, \underline{w_j}) = [\underline{w_i}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)[\underline{w_j}]_{\mathcal{B}} = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id_V)^i\right)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id_V)^j = \left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id_V)\right)_i^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(Id_V)^j$, da cui si ricava l'identità desiderata. □

Definizione. (radicale di un prodotto hermitiano) Analogamente al caso del prodotto scalare, si definisce il **radicale** del prodotto φ come il seguente sottospazio:

$$V^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ \forall\, \underline{w} \in V\}.$$

Proposizione. Sia $\mathcal{B}$ una base di V e φ un prodotto hermitiano. Allora $V^\perp = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi))$[1].

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ e sia $\underline{v} \in V^\perp$. Siano a_1, ..., $a_n \in \mathbb{K}$ tali che $\underline{v} = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}$. Allora, poiché $\underline{v} \in V$, $0 = \varphi(\underline{v_i}, \underline{v}) == a_1\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_1}) + \ldots + a_n\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_n}) = M_i[\underline{v}]_{\mathcal{B}}$, da cui si ricava che $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, e quindi che $V^\perp \subseteq [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi))$.

Sia ora $\underline{v} \in V$ tale che $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Allora, per ogni $\underline{w} \in V$, $\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = [\underline{w}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = [\underline{w}]_{\mathcal{B}}^* 0 = 0$, da cui si conclude che $\underline{v} \in V^\perp$, e quindi che $V^\perp \supseteq [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi))$, da cui $V^\perp = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi))$, ossia la tesi. □

Osservazione. Come conseguenza della proposizione appena dimostrata, valgono le principali proprietà già viste per il prodotto scalare.

► $\det(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = 0 \iff V^\perp \neq \{\underline{0}\} \iff \varphi$ è degenere,
► Vale il teorema di Lagrange, e quindi quello di Sylvester, benché con alcune accortezze: si introduce, come nel caso di $\mathbb{R}$, il concetto di segnatura, che diventa l'invariante completo della nuova congruenza hermitiana, che ancora una volta si dimostra essere una relazione di equivalenza.

Definizione. (restrizione ai reali di uno spazio) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ con base $\mathcal{B}$. Si definisce allora lo spazio $V_{\mathbb{R}}$, detto **spazio di restrizione su** $\mathbb{R}$ di V, come uno spazio su $\mathbb{R}$ generato da $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B} \cup i\mathcal{B}$.

Esempio. Si consideri $V = \mathbb{C}^3$. Una base di $\mathbb{C}^3$ è chiaramente $\{\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3}\}$. Allora $V_{\mathbb{R}}$ sarà uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ generato dai vettori $\{\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3}, i\underline{e_1}, i\underline{e_2}, i\underline{e_3}\}$.

[1] Stavolta non è sufficiente considerare la mappa $f : V \to V^*$ tale che $f(\underline{v}) = [\underline{w} \mapsto \varphi(\underline{v}, \underline{w})]$, dal momento che f non è lineare, bensì antilineare, ossia $f(a\underline{v}) = \overline{a} f(\underline{v})$.

Osservazione. Si osserva che lo spazio di restrizione su $\mathbb{R}$ e lo spazio di partenza condividono lo stesso insieme di vettori. Infatti, $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\mathcal{B} \cup i\mathcal{B})$. Ciononostante, $\dim V_{\mathbb{R}} = 2 \dim V$, se $\dim V \in \mathbb{N}$.

Definizione. (complessificazione di uno spazio) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Si definisce allora lo **spazio complessificato** $V_{\mathbb{C}} = V \times V$ su $\mathbb{C}$ con le seguenti operazioni:

- $(\underline{v}, \underline{w}) + (\underline{v}', \underline{w}') = (\underline{v} + \underline{v}', \underline{w} + \underline{w}')$,
- $(a + bi)(\underline{v}, \underline{w}) = (a\underline{v} - b\underline{w}, a\underline{w} + b\underline{v})$.

Osservazione. La costruzione dello spazio complessificato emula in realtà la costruzione di $\mathbb{C}$ come spazio $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Infatti se $z = (c, d)$, vale che $(a + bi)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, mentre si mantiene l'usuale operazione di addizione. In particolare si può identificare l'insieme $iV := V \times \{\underline{0}\}$ come V, mentre $\{\underline{0}\} \times V$ viene identificato come l'insieme degli immaginari di $V_{\mathbb{C}}$. Infine, moltiplicare per uno scalare reale un elemento di $V \times \{\underline{0}\}$ equivale a moltiplicare la sola prima componente con l'usuale operazione di moltiplicazione di V. Allora, come accade per $\mathbb{C}$, si può sostituire la notazione $(\underline{v}, \underline{w})$ con la più comoda notazione $\underline{v} + i\underline{w}$.

Osservazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base di V. Innanzitutto si osserva che $(a + bi)(\underline{v}, \underline{0}) = (a\underline{v}, b\underline{v})$. Pertanto si può concludere che $\mathcal{B} \times \{\underline{0}\}$ è una base dello spazio complessificato $V_{\mathbb{C}}$ su $\mathbb{C}$.

Infatti, se $(a_1 + b_1 i)(\underline{v_1}, \underline{0}) + \ldots + (a_n + b_n i)(\underline{v_n}, \underline{0}) = (\underline{0}, \underline{0})$, allora $(a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}, b_1\underline{v_1} + \ldots + b_n\underline{v_n}) = (\underline{0}, \underline{0})$. Poiché però $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente per ipotesi, l'ultima identità implica che $a_1 = \cdots = a_n = b_1 = \cdots = b_n = 0$, e quindi che $\mathcal{B} \times \{\underline{0}\}$ è linearmente indipendente.

Inoltre $\mathcal{B} \times \{\underline{0}\}$ genera $V_{\mathbb{C}}$. Se infatti $\underline{v} = (\underline{u}, \underline{w})$, e vale che:

$$\underline{u} = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}, \quad \underline{w} = b_1\underline{v_1} + \ldots + b_n\underline{v_n},$$

allora $\underline{v} = (a_1 + b_1 i)(\underline{v_1}, \underline{0}) + \ldots + (a_n + b_n i)(\underline{v_n}, \underline{0})$. Quindi $\dim V_{\mathbb{C}} = \dim V$.

Definizione. Sia f un'applicazione $\mathbb{C}$-lineare di V spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Allora si definisce la **restrizione su** $\mathbb{R}$ di f, detta $f_{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$, in modo tale che $f_{\mathbb{R}}(\underline{v}) = f(\underline{v})$.

Osservazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base di V su $\mathbb{C}$. Sia $A = M_{\mathcal{B}}(f)$. Si osserva allora che, se $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup i\mathcal{B}$ e $A = A' + iA''$ con A', $A'' \in M(n, \mathbb{R})$, vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}'}(f_{\mathbb{R}}) = \left(\begin{array}{c|c} A' & -A'' \\ \hline A'' & A' \end{array}\right).$$

Infatti, se $f(\underline{v_i}) = (a_1 + b_1 i)\underline{v_1} + \ldots + (a_n + b_n i)\underline{v_n}$, vale che $f_{\mathbb{R}}(\underline{v_i}) = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n} + b_1(i\underline{v_1}) + \ldots + b_n(i\underline{v_n})$, mentre $f_{\mathbb{R}}(i\underline{v_i}) = if(\underline{v_i}) = -b_1\underline{v_1} + \ldots - b_n\underline{v_n} + a_1(i\underline{v_1}) + \ldots + a_n(i\underline{v_n})$.

Teorema. (di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare) Sia V uno spazio vettoriale e sia φ un suo prodotto scalare non degenere. Allora per ogni $f \in V^*$ esiste un unico $\underline{v} \in V$ tale che $f(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ $\forall\, \underline{w} \in V$.

Dimostrazione. Si consideri l'applicazione a_φ. Poiché φ non è degenere, $\operatorname{Ker} a_\varphi = V^\perp = \{\underline{0}\}$, da cui si deduce che a_φ è un isomorfismo. Quindi $\forall\, f \in V^*$ esiste un unico $\underline{v} \in V$ tale per cui $a_\varphi(\underline{v}) = f$, e dunque tale per cui $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_\varphi(\underline{v})(\underline{w}) = f(\underline{w})$ $\forall\, \underline{w} \in V$. $\square$

Dimostrazione costruttiva. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base ortogonale di V per φ. Allora $\mathcal{B}^*$ è una base di V^*. In particolare $f = f(\underline{v_1})\underline{v_1}^* + \ldots + f(\underline{v_n})\underline{v_n}^*$. Sia $\underline{v} = \frac{f(\underline{v_1})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})}\underline{v_1} + \ldots + \frac{f(\underline{v_n})}{\varphi(\underline{v_n}, \underline{v_n})}$. Detto $\underline{w} = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}$, si deduce che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_1 f(\underline{v_1}) + \ldots + a_n f(\underline{v_n}) = f(\underline{w})$. Se esistesse $\underline{v}' \in V$ con la stessa proprietà di $\underline{v}$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v} - \underline{v}', \underline{w})$ $\forall\, \underline{w} \in V$. Si deduce dunque che $\underline{v} - \underline{v}' \in V^\perp$, contenente solo $\underline{0}$ dacché φ è non degenere; e quindi si conclude che $\underline{v} = \underline{v}'$, ossia che esiste solo un vettore con la stessa proprietà di $\underline{v}$. $\square$

Teorema. (di rappresentazione di Riesz per il prodotto hermitiano) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ e sia φ un suo prodotto hermitiano non degenere. Allora per ogni $f \in V^*$ esiste un unico $\underline{v} \in V$ tale che $f(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ $\forall\, \underline{w} \in V$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ una base ortogonale di V per φ. Allora $\mathcal{B}^*$ è una base di V^*. In particolare $f = f(\underline{v_1})\underline{v_1}^* + \ldots + f(\underline{v_n})\underline{v_n}^*$. Sia $\underline{v} = \frac{\overline{f(\underline{v_1})}}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})}\underline{v_1} + \ldots + \frac{\overline{f(\underline{v_n})}}{\varphi(\underline{v_n}, \underline{v_n})}$. Detto $\underline{w} = a_1\underline{v_1} + \ldots + a_n\underline{v_n}$, si deduce che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_1 f(\underline{v_1}) + \ldots + a_n f(\underline{v_n}) = f(\underline{w})$. Se esistesse $\underline{v}' \in V$ con la stessa proprietà di $\underline{v}$, $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v} - \underline{v}', \underline{w})$ $\forall\, \underline{w} \in V$. Si deduce dunque che $\underline{v} - \underline{v}' \in V^\perp$, contenente solo $\underline{0}$ dacché φ è non degenere; e quindi si conclude che $\underline{v} = \underline{v}'$, ossia che esiste solo un vettore con la stessa proprietà di $\underline{v}$. $\square$

Proposizione. Sia V uno spazio vettoriale con prodotto scalare φ non degenere. Sia $f \in \mathrm{End}(V)$. Allora esiste un unico endomorfismo $g : V \to V$, detto il **trasposto di** f e indicato con $f^\top$ in assenza di ambiguità[2], tale che:

$$a_\varphi \circ g = f^\top \circ a_\varphi,$$

ossia che:

$$\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(g(\underline{v}), \underline{w}) \ \forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

Dimostrazione. Si consideri $(f^\top \circ a_\varphi)(\underline{v}) \in V^*$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare, esiste un unico $\underline{v}'$ tale che $(f^\top \circ a_\varphi)(\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \ \forall\, \underline{w} \in V$. Si costruisce allora una mappa $g : V \to V$ che associa a $\underline{v}$ tale $\underline{v}'$. Si dimostra che g è un'applicazione lineare, e che dunque è un endomorfismo:

(i) Siano $\underline{v_1}$, $\underline{v_2} \in V$. Si deve dimostrare innanzitutto che $g(\underline{v_1} + \underline{v_2}) = g(\underline{v_1}) + g(\underline{v_2})$, ossia che $\varphi(g(\underline{v_1}) + g(\underline{v_2}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v_1} + \underline{v_2}, f(\underline{w})) \ \forall\, \underline{w} \in V$.

Si osservano le seguenti identità:

$$\begin{gathered}\varphi(\underline{v_1} + \underline{v_2}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v_1}, f(\underline{w})) + \varphi(\underline{v_2}, f(\underline{w})) = (*), \\ \varphi(g(\underline{v_1}) + g(\underline{v_2}), \underline{w}) = \varphi(g(\underline{v_1}), \underline{w}) + \varphi(g(\underline{v_2}), \underline{w}) = (*),\end{gathered}$$

da cui si deduce l'uguaglianza desiderata, essendo $g(\underline{v_1} + \underline{v_2})$ l'unico vettore di V con la proprietà enunciata dal teorema di rappresentazione di Riesz.

(ii) Sia $\underline{v} \in V$. Si deve dimostrare che $g(a\underline{v}) = ag(\underline{v})$, ossia che $\varphi(ag(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(a\underline{v}, f(\underline{w})) \ \forall\, a \in \mathbb{K}$, $\underline{w} \in V$. Se $a = 0$, l'uguaglianza è ovvia; altrimenti è sufficiente moltiplicare per a l'identità $\varphi(g(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$. Analogamente a prima, si deduce che $g(a\underline{v}) = ag(\underline{v})$, essendo $g(a\underline{v})$ l'unico vettore di V con la proprietà enunciata dal teorema di rappresentazione di Riesz.

[2] Si tenga infatti in conto della differenza tra $f^\top : V \to V$, di cui si discute nell'enunciato, e $f^\top : V^* \to V^*$ che invece è tale che $f^top(g) = g \circ f$.

Infine si dimostra che g è unico. Sia infatti g' un endomorfismo di V che condivide la stessa proprietà di g. Allora $\varphi(g(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(g'(\underline{v}), \underline{w})$ $\forall\, \underline{v},\ \underline{w} \in V$, da cui si deduce che $\varphi(g(\underline{v}) - g'(\underline{v}), \underline{w}) = 0\ \forall\, \underline{v},\ \underline{w} \in V$, ossia che $g(\underline{v}) - g'(\underline{v}) \in V^\perp\ \forall\, \underline{v} \in V$. Tuttavia φ è non degenere, e quindi $V^\perp = \{\underline{0}\}$, da cui si deduce che deve valere l'identità $g(\underline{v}) = g'(\underline{v})\ \forall\, \underline{v} \in V$, ossia $g = g'$. □

Proposizione. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ e sia φ un suo prodotto hermitiano. Allora esiste un'unica mappa[3] $f^* : V \to V$, detta **aggiunto di** f, tale che $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w})\ \forall\, \underline{v},\ \underline{w} \in V$.

Dimostrazione. Sia $\underline{v} \in V$. Si consideri il funzionale σ tale che $\sigma(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$. Per il teorema di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare esiste un unico $\underline{v}' \in V$ tale per cui $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \sigma(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w})$. Si costruisce allora una mappa f^* che associa $\underline{v}$ a tale $\underline{v}'$.

Si dimostra infine che la mappa f^* è unica. Sia infatti $\mu : V \to V$ che condivide la stessa proprietà di f^*. Allora $\varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\mu(\underline{v}), \underline{w})\ \forall\, \underline{v},\ \underline{w} \in V$, da cui si deduce che $\varphi(f^*(\underline{v}) - \mu(\underline{v}), \underline{w}) = 0\ \forall\, \underline{v},\ \underline{w} \in V$, ossia che $f^*(\underline{v}) - \mu(\underline{v}) \in V^\perp\ \forall\, \underline{v} \in V$. Tuttavia φ è non degenere, e quindi $V^\perp = \{\underline{0}\}$, da cui si deduce che deve valere l'identità $f^*(\underline{v}) = \mu(\underline{v})$ $\forall\, \underline{v} \in V$, ossia $f^* = \mu$. □

Osservazione. L'operazione di trasposizione di un endomorfismo sul prodotto scalare non degenere φ è un'involuzione. Infatti valgono le seguenti identità $\forall\, \underline{v},\ \underline{w} \in V$:

$$\begin{cases} \varphi(\underline{w}, f^\top(\underline{v})) = \varphi(f^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})), \\ \varphi(\underline{w}, f^\top(\underline{v})) = \varphi((f^\top)^\top(\underline{w}), \underline{v}) = \varphi(\underline{v}, (f^\top)^\top(\underline{w})). \end{cases}$$

Si conclude allora, poiché φ è non degenere, che $f(\underline{w}) = (f^\top)^\top(\underline{w})\ \forall\, \underline{w} \in V$, ossia che $f = (f^\top)^\top$.

Osservazione. Analogamente si può dire per l'operazione di aggiunta per un prodotto hermitiano φ non degenere. Valgono infatti le seguenti identità $\forall\, \underline{v},\ \underline{w} \in V$:

$$\begin{cases} \overline{\varphi(\underline{w}, f^*(\underline{v}))} = \varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})), \\ \overline{\varphi(\underline{w}, f^*(\underline{v}))} = \overline{\varphi((f^*)^*(\underline{w}), \underline{v})} = \varphi(\underline{v}, (f^*)^*(\underline{w})), \end{cases}$$

da cui si deduce, come prima, che $f = (f^*)^*$.

[3]Si osservi che f^* non è un'applicazione lineare, benché sia invece *antilineare*.

Nota. D'ora in poi, nel corso del documento, s'intenderà per φ un prodotto scalare (o eventualmente hermitiano) di V.

Definizione. Sia $f \in \text{End}(V)$. Si dice allora che f è **simmetrico** se $f = f^\top$.

Definizione. Sia $f \in \text{End}(V)$. Si dice allora che f è **ortogonale** se $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$.

Definizione. Sia $f \in \text{End}(V)$ e si consideri il prodotto hermitiano φ. Si dice allora che f è **hermitiano** se $f = f^*$.

Definizione. Sia $f \in \text{End}(V)$ e si consideri il prodotto hermitiano φ. Si dice allora che f è **unitario** se $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$.

Definizione. (spazio euclideo reale) Si definisce **spazio euclideo reale** uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ dotato del prodotto scalare standard $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definizione. (spazio euclideo complesso) Si definisce **spazio euclideo complesso** uno spazio vettoriale V su $\mathbb{C}$ dotato del prodotto scalare standard $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definizione. (base ortonormale) Si definisce **base ortonormale** di uno spazio vettoriale V su un suo prodotto φ una base ortogonale $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ tale che $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \delta_{ij}$.

Proposizione. Sia (V, φ) uno spazio euclideo reale e sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di V. Allora $f \in \text{End}(V)$ è simmetrico $\iff M_\mathcal{B}(f) = M_\mathcal{B}(f)^\top$.

Dimostrazione. Si osserva che $M_\mathcal{B}(\varphi) = I_n$. Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$. Se f è simmetrico, allora $[\underline{v}]_\mathcal{B}^\top M_\mathcal{B}(f)[\underline{w}]_\mathcal{B} = [\underline{v}]_\mathcal{B}^\top M_\mathcal{B}(\varphi)(M_\mathcal{B}(f)[\underline{w}]_\mathcal{B}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = (M_\mathcal{B}(f)[\underline{v}]_\mathcal{B})^\top M_\mathcal{B}(\varphi)[\underline{w}]_\mathcal{B} = [\underline{v}]_\mathcal{B}^\top M_\mathcal{B}(f)^\top [\underline{w}]_\mathcal{B}$.
In particolare, $M_\mathcal{B}(f)_{ij}^\top = [\underline{v_i}]_\mathcal{B}^\top M_\mathcal{B}(f)^\top [\underline{v_j}]_\mathcal{B} = [\underline{v_i}]_\mathcal{B}^\top M_\mathcal{B}(f)[\underline{v_j}]_\mathcal{B} = M_\mathcal{B}(f)_{ij}$, e quindi $M_\mathcal{B}(f)^\top = M_\mathcal{B}(f)$.

Se invece $M_\mathcal{B}(f)^\top = M_\mathcal{B}(f)$, $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = [\underline{v}]_\mathcal{B}^\top M_\mathcal{B}(\varphi)(M_\mathcal{B}(f)[\underline{w}]_\mathcal{B}) = [\underline{v}]_\mathcal{B}^\top M_\mathcal{B}(f)[\underline{w}]_\mathcal{B} = [\underline{v}]_\mathcal{B}^\top M_\mathcal{B}(f)^\top [\underline{w}]_\mathcal{B} = (M_\mathcal{B}(f)[\underline{v}]_\mathcal{B})^\top [\underline{w}]_\mathcal{B} = (M_\mathcal{B}(f)[\underline{v}]_\mathcal{B})^\top M_\mathcal{B}(\varphi)[\underline{w}]_\mathcal{B} = \varphi(f(\underline{v}), \underline{w})$, e quindi f è simmetrico. □

Proposizione. Sia $\mathcal{B}$ una base di V. Allora $f \in \text{End}(V)$ è simmetrico $\iff$ $M_\mathcal{B}(f)$ è una matrice simmetrica.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

($\implies$) Se f è simmetrico, $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(f(\underline{v}), \underline{w})$. Quindi $[\underline{v}]_\mathcal{B} M_\mathcal{B}(\varphi)$ □

Proposizione. Se $V = \mathbb{R}^n$ con prodotto canonico $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^\top \underline{y}$. Sono allora equivalenti i seguenti fatti:

(i) $A \in O_n$,

(ii) $f_A : V \to V$ con $f_A(\underline{x}) = A\underline{x}$ è ortogonale,

(iii) Le colonne (e le righe) di A formano una base ortonormale di V.

Dimostrazione. (1 - 2) ovvio (2 - 3) f_A manda basi ortonormali in basi ortonormali, e quindi così sono ortonormali le colonne di A. Analogamente per le righe considerando $A^\top A = I$. (3 - 1) $A^\top A = I$. $\square$

Proposizione. Se $V = \mathbb{C}^n$ con prodotto canonico hermitiano, sono equivalenti i seguenti fatti:

(i) $A \in U_n$,

(ii) $f_A : V \to V$ con $f_A(\underline{x}) = A\underline{x}$ è unitaria,

(iii) Le colonne (e le righe) di A formano una base ortonormale di V.

Dimostrazione. Come prima. $\square$