Note del corso di Analisi Matematica 1

Gabriel Antonio Videtta

30 marzo 2023

Esercitazioni: applicazione dei teoremi sulla continuità

Esercizio 1. Siano $I = [a, b] \in \overline{\mathbb{R}}$, $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ continua strettamente crescente. Allora l'eq. $f(x) = y$ ha una sola soluzione se $f(a) \leq y \leq f(b)$ e nessuna soluzione se $y < f(a)$ o se $y > f(b)$.

Soluzione. Poiché f è strettamente crescente, f è iniettiva. Allora, se y è tale che $f(a) \leq y \leq f(b)$, per il teorema dei valori intermedi, $\exists\, x \mid f(x) = y$; e tale x è unica dal momento che f è iniettiva. In particolare, poiché f è crescente, $f(a)$ e $f(b)$ sono rispettivamente $\inf f(I)$ e $\sup f(I)$, e quindi sono anche $\min f(I)$ e $\max f(I)$, da cui, se $y < f(a)$ o $y > f(b)$, $y = f(x)$ non ammette soluzione.

Esercizio 2. Si consideri l'eq. $xe^x = 4$ (*).

(a) Mostrare che (*) ammette un'unica soluzione $\overline{x} \in \overline{\mathbb{R}}$, e trovare x_0, x_1 tali che $x_0 < \overline{x} < x_1$.

(b) Calcolare $\overline{x}$ con errore minore a 10^{-2}.

Soluzione. Si studia la funzione $f(x) = xe^x - 4$. f è continua, e vale che $f(0) = -4$ e che $f(2) = 2e^2 - 4 \geq 4$. Quindi, per il teorema degli zeri su $[0, 2]$, f ammette uno zero $\overline{x}$ in $(0, 2)$.

Si studia adesso la derivata $f'(x) = e^x + xe^x = (1 + x)e^x$. $f'(x) > 0 \iff x > -1$, ossia f è crescente per $x > -1$. Al contrario, f decresce per $x < -1$; poiché allora $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -4$, $\sup f((-\infty), -1)) = -4$, e quindi f non ha zeri per $x < -1$, tantomeno per $x = -1$ (infatti $f(-1) = -1e^{-1} - 4 \neq 0$).

Poiché per $x > -1$ f è allora strettamente crescente, f può ammette un solo zero, ossia quello trovato all'inizio della soluzione.
Per ricavare $\overline{x}$ con errore minore a 10^{-2}, si applica il metodo di bisezione per 7 volte (infatti $\varepsilon(n) = \frac{1}{2^n}$ per ogni passaggio n-esimo dell'algoritmo, e $\varepsilon(7) \approx 0.0079 < 0.01$), ricavando $\overline{x} = 1.2031$.

Esercizio 3. Si consideri l'eq $x^5 + x = 10$ (*).

(a) Mostrare che $\exists\, \overline{x}$ soluzione di (*) e che tale $\overline{x}$ è unica.

(b) Mostrare che $\overline{x} \in (0, 2)$.

(c) Trovare $\overline{x}$ con errore minore a 10^{-2}.

Soluzione. Si consideri la funzione $f(x) = x^5 + x - 10$. Si osserva che tale funzione è sempre continua. Si osserva che $f(0) = -10$ e che $f(2) = 24$. Quindi f ammette una soluzione $\overline{x}$ in $(0, 2)$.

Si studia la derivata di f, ossia $f'(x) = 5x^4 + 1$. Poiché $f'(x) > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, f è strettamente crescente, e quindi f ammette un'unica soluzione, $\overline{x}$.

Per trovare la soluzione $\overline{x}$ con errore minore a 10^{-2}, come nell'esercizio precedente, è necessario applicare il metodo di bisezione per 7 volte, ricavando $\overline{x} = 1.5469$.

Osservazione. La scelta del punto medio nell'algoritmo di bisezione è (quasi) forza. Nella costruzione degli intervalli è infatti necessario che l'intervallo, all'infinito, tenda ad un solo punto; qualora non venga scelto il punto medio degli intervalli, questo non è assolutamente garantito.

Esercizio 4. Sia $I = [a, b]$. Siano f_1, $f_2 : I \to \mathbb{R}$ continue tali che $f_1(a) < f_2(a)$ e che $f_1(b) > f_2(b)$. Dimostrare che $\exists\, \overline{x} \in I$ tale che $f_1(\overline{x}) = f_2(\overline{x})$.

Soluzione. Si consideri $g(x) = f_1(x) - f_2(x)$. g è continua in I, e $g(a) < 0$ e $g(b) > 0$ per ipotesi. Allora, per il teorema degli zeri, $\exists\, x \in (a, b)$ tale che $g(x) = 0$, ossia che $f_1(x) = f_2(x)$, da cui la tesi.

Esercizio 5. Sia $I = [a, b]$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Sia P un punto che si muove in modo continuo nella striscia $I \times \mathbb{R}$. Sia in particolare $P : [0, 1] \to I \times \mathbb{R}$ tale che $t \mapsto (x(t), y(t))$ con $a \leq x(t) \leq b\ \forall\, t \in [0, 1]$, con $y(0) > f(a)$, $y(1) < f(b)$, $x(0) = a$ e $x(1) = b$. Dimostrare che $\exists\, t \in [0, 1]$ tale che $(x(t), y(t)) = (x(t), f(x(t)))$, ossia che tale curva si interseca con la funzione f.

Soluzione. Si consideri la funzione $g(t) = f(x(t)) - y(t)$. Poiché x ed f sono continue, lo è anche la loro composizione, e così, poiché anche y è continua, lo è in particolare g. Dal momento che $g(0) = f(x(0)) - y(0) = f(a) - y(0) < 0$ e $g(1) = f(x(1)) - y(1) = f(b) - y(1) > 0$, per il teorema dei valori intermedi, esiste $\overline{t} \in (0,1)$ tale che $g(0) = 0$, ossia tale che $f(x(\overline{t})) = y(\overline{t})$, da cui la tesi.

Esercizio 6. Sia $I = (a,b)$ e sia $f : (a,b) \to \overline{\mathbb{R}}$ continua tale che $\exists\, \ell_a = \lim_{x\to a} f(x)$, $\ell_b = \lim_{x\to b} f(x)$. Si consideri allora l'estensione continua $\tilde{f}$:

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq a, b, \\ \ell_a & \text{se } x = a, \\ \ell_b & \text{se } x = b. \end{cases}$$

Allora[1] vale che $\tilde{f}$ è continua in $\overline{I}$.

Soluzione. Sicuramente $\tilde{f}$ è continua in I, dacché vale quanto f in questa porzione di intervallo. Poiché $\ell_a = \lim_{x\to a} f(x)$, per ogni intorno I di ℓ_a esiste un intorno J di a tale che $f(J \cap I \setminus \{a\}) = f(J \cap I) = \tilde{f}(J \cap I) \subseteq I$, ossia, per definizione, $\tilde{f}$ è continua anche in a, e, analogamente, anche in b.

Osservazione. Come mostrato nella traccia dell'esercizio precedente, si possono estendere continuamente alcune funzioni elementari. Per esempio, detta $f(x) = \frac{1}{x^2}$, si può estendere f a $\tilde{f} : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ in modo tale che:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = \pm\infty, \\ +\infty & \text{se } x = 0, \\ f(x) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Esercizio 7. Si trovi un esempio di funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, dove, dato $\overline{x}$ punto di accumulazione di X, $f(x) \xrightarrow[x\,\to\,\overline{x}]{} \ell$, ma $\exists\,(x_n) \subseteq X$ tale che $x_n \xrightarrow[n\,\to\,\infty]{} \overline{x}$, ma $f(x_n)$ non tende a ℓ per $n \to \infty$.

Soluzione. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si consideri allora la successione $(x_n) \subseteq X$ tale che:

[1] Come già riscontrato, vale un risultato ancora più forte: data un'estensione $\tilde{f}$ di f in $\overline{I}$, $\tilde{f}$ è continua se e solo se i valori estesi sono esattamente i limiti della funzione nei punti di $I \setminus \overline{I}$; e quindi l'estensione continua è ben definita, e unica del suo genere.

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \frac{1}{n} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si mostra che $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Infatti, sia $I = [-\varepsilon, \varepsilon]$, con $\varepsilon > 0$, un intorno di 0. Allora per $n > \frac{1}{\varepsilon}$ vale che $x_n \in I$ (infatti 0 vi appartiene sempre, e $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$); da cui si ricava proprio che $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.

Chiaramente $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 1$. È sufficiente mostrare allora che $f(x_n)$ non tende a 1 per $n \to \infty$. Si consideri la sottosuccessione $f(x_{2n})$: poiché $f(x_{2n}) = f(0) = 0$, la sottosuccessione presa in considerazione è costante, e quindi $f(x_{2n}) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Anche la sottosuccessione $f(x_{2n+1})$ è costante, e vale che $f(x_{2n+1}) = f(\frac{1}{n}) = 1$, e quindi $f(x_{2n+1}) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$. Poiché allora il limite di $f(x_n)$, se esistesse, dovrebbe essere uguale a quello di ambo le sottosuccessioni considerate, ed il limite è unico, $f(x_n)$ non ammette limite, proprio come volevasi dimostrare.

Esercizio 8. Sia $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ tale che ogni punto di X sia isolato. Dimostrare allora che X è al più numerabile.

Soluzione. Sia $\overline{x} \in X$. Poiché $\overline{x}$ è per ipotesi isolato, esiste un intorno $I(\overline{x})$ di $\overline{x}$ tale che $I \cap X = \{\overline{x}\}$. Si può sempre trovare un intorno $J(\overline{x})$ più piccolo di $I(\overline{x})$ tale che $J(\overline{x}) \cap I(x) = \varnothing \ \forall x \in X \setminus \{\overline{x}\}$. Se infatti non si potesse, esisterebbe un $x \in X \setminus \{\overline{x}\}$ tale che $J \cap I(x) \neq \varnothing$ per ogni intorno $J \subseteq I(\overline{x})$ di $\overline{x}$: sicuramente tale $x \notin J$, altrimenti $I(\overline{x})$ conterrebbe un elemento di X diverso da $\overline{x}$, assurdo dal momento che $I(\overline{x})$ non ne contiene uno per costruzione; ma x non può neanche appartenere a $X \setminus J$, dacché in tal modo si può sempre costruire con errore a piacimento un intorno più piccolo di J tale che sia disgiunto con $I(x)$, $\lightning$. Dal momento che $\mathbb{Q}$ è denso in $\overline{\mathbb{R}}$, si può allora sempre associare a $J(\overline{x})$ un numero razionale q al suo interno. In questo modo si può costruire una funzione $f : X \to \mathbb{Q}$, tale che $f(\overline{x}) = q$. Poiché i $J(x)$ sono digiunti per costruzione, f è iniettiva, e quindi $|X| \leq |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$, e quindi X è al più numerabile.