Completezza dei numeri reali

Esistono modelli intuitivi di $\mathbb{R}$, come quello dei numeri con segno ed espansione decimale infinita. Il difetto di questo modello è l'ambiguità delle operazioni di somma e prodotto. Inoltre esso non prevede di base le classi di equivalenza che includono $1 = 0,\overline{9}$.
È tuttavia ben definito un ordine, cifra a cifra.

Per ragioni di convenienza, si definisce l'insieme dei numeri reali estesi: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = [-\infty, +\infty]$, su cui è ben definito un ordine, ma su cui non tutte le operazioni sono possibili (e.g. somma e prodotto tra reali e $\pm\infty$).

Def. Dato $E \subset \mathbb{R}$ $(E \neq \emptyset)$, si indica con Mag_E l'insieme dei maggioranti di E:

$$\text{Mag}_E := \{ y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E,\ x \leq y \} = \text{"}E \leq y\text{"}.$$

analogamente i minoranti di E si definiscono come:

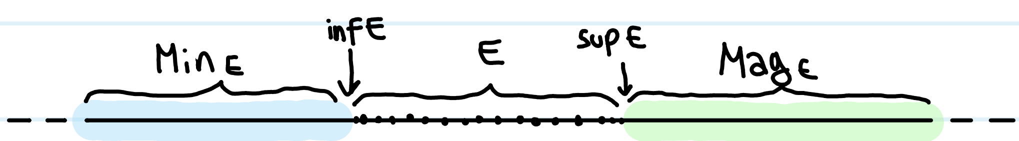
$$\text{Min}_E := \{ y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E,\ x \geq y \} = \text{"}y \leq E\text{"}.$$

Def. (di estr. sup. e inf.) se esistono, si definiscono l'estremo superiore e inferiore di $E \subset \mathbb{R}$ $(E \neq \emptyset)$ come:

$$\cdot \ \sup E := \begin{cases} \min \text{Mag}_E & \text{se } \text{Mag}_E \neq \emptyset \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\cdot \ \inf E := \begin{cases} \max \text{Min}_E & \text{se } \text{Min}_E \neq \emptyset \\ -\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

es.



OSS $\exists \max E \Rightarrow \max E = \sup E,$

$\exists \min E \Rightarrow \min E = \inf E.$

OSS $\sup E \in E \Rightarrow \max E = \sup E,$

$\inf E \in E \Rightarrow \min E = \inf E.$

OSS. $E = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq \sqrt{2}\}$ non ammette estremo inferiore in $\mathbb{Q}$, ma in $\mathbb{R}$ sì.

Teorema (di completezza) $\exists \sup E, \inf E \ \forall E \subset \mathbb{R} \ (E \neq \emptyset)$.

Se $Min_E = \emptyset$, $\inf E = -\infty$. Altrimenti, sia n_0 il più grande intero minorante di E (i.e. $n_0 = \max Min_E \cap \mathbb{Z}$). Suppongo senza perdità di generalità $n_0 \geq 0 \Leftarrow 0 \in Min_E$. Sia a_1 la più grande cifra per cui $n_0, a_1 \in Min_E$. Reiterando costruisco $y = n_0, a_1 a_2 a_3 \dots = \inf E$. Analogamente per $\sup E$. $\square$

Corollario Dati $E, F \subset \mathbb{R}$, $E, F \neq \emptyset$ t.c. $\forall y \in F, \forall x \in E$, $x \leq y$ ("$E \leq F$"), $\exists z \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall y \in F, \forall x \in E, x \leq z \leq y$ ("$E \leq z \leq F$").

E' sufficiente prendere in considerazione $\sup E$ o $\inf F$: tale numero e' sicuramente maggiorante di E e per ipotesi è minore o uguale a ogni elemento di F.

OSS. Talvolta in letteratura quest'ultimo corollario e' detto come il teorema da cui deriva (a cui e' in realtà equivalente), ossia teorema (o assioma) di completezza.

oss. Si poteva alternativamente definire $\mathrm{Mag}_E := \{y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall x \in E,\ x \leq y\}$ e $\mathrm{Min}_E := \{y \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall x \in E,\ x \geq y\}$, con $\sup E := \min \mathrm{Mag}_E$ e $\inf E := \max \mathrm{Min}_E$ (presupponendo, volendo, $E \subset \overline{\mathbb{R}}$).

Def. Dato X, una relazione $\leq$ si dice d'ordinamento totale se:

(i) $x \leq x \quad \forall x \in X$

(ii) $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z \quad \forall x, y, z \in X$,

(iii) $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$

(iv) $x \leq y \vee y \leq x \quad \forall x, y \in X$ (senza questa proprietà, si direbbe che è d'ordinamento parziale).

es. l'inclusione è un ordinamento parziale.

OSS. si può definire Mag_E, Min_E, sup e inf su qualsiasi campo totalmente ordinato.

Def. X è completo se vale l'assioma di completezza, ossia se dati $E, F \subset X \mid E \leq F \ \exists x \in X \mid E \leq x \leq F$.

Prop. se X e' completo, $E \subset X$ $(E \neq \emptyset)$ e $\mathrm{Mag}_E \neq \emptyset$, $\exists \sup E$ (analogamente per $\inf E$).

Def. (campo ordinato) $(X, +, \cdot)$ e' un campo ordinato con ordinamento $\leq$ se:

(i) $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z \quad \forall x, y, z \in X$,

(ii) $x \leq y,\ z \geq 0 \Rightarrow xz \leq yz \quad \forall x, y, z \in X$.

Oss. $\mathbb{C}$ non e' un campo ordinato. Se lo fosse, se $i > 0$, $i^2 > 0 \Rightarrow -1 > 0$ ↯ ; se $i < 0 \Rightarrow i^2 > 0 \Rightarrow -1 > 0$, ↯.

Oss. Vale che $1 > 0$. Infatti, se $1 < 0$, $-1 > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (-1)(-1) > 0 \Rightarrow 1 > 0$, ↯.

Oss. Sono fatti equivalenti su un insieme ordinato X:

(i) vale l'assioma di completezza,

(ii) dato $E \subset X$ $(E \neq \emptyset)$ limitato superiormente, $\exists \sup E$,

(iii) dato $E \subset X$ $(E \neq \emptyset)$ limitato inferiormente, $\exists \inf E$.

Def. Un insieme ordinato X su cui vale l'assioma di completezza si dice ordinato completamente.

Teorema Sia X un campo ordinato e completo. Allora X e' isomorfo a $\mathbb{R}$, ossia $\exists\ \varphi: \mathbb{R} \to X$ isomorfismo t.c. $a \leq b \iff$
$\iff \varphi(a) \leq \varphi(b)\ \forall a, b \in \mathbb{R}$.

Def. Un campo ordinato si dice archimedeo se $\forall\ a, b > 0\ \exists$
$n \mid\ an \geq b$.

OSS. Sia $\mathbb{Q}$ che $\mathbb{R}$ sono archimedei.

Def. Un $E \subset X$ si dice denso in X se $a < b \in X \Rightarrow \exists\, c \in E \mid$
$a \leq c \leq b$.