Applicazioni lineari

Def. Dati V e W spazi vett., si indica con
$$\mathcal{L}(V,W) = \{ f : V \to W \mid f \text{ lineare} \}$$
lo spazio vett. delle app. lineari da V in W.

Teorema Fissata una base B di V, l'app. che associa una $f \in \mathcal{L}(V,W)$ alla sua restrizione $f|_B \in W^B$ è bigettiva.

Sia $B = \{\underline{v}_j\}_{j \in J}$ base di V e siano fissate le loro immagini. Allora $\underline{v} \in V$ sarà t.c. $f(\underline{v}) = f(\alpha_1 \underline{v_1} + \dots + \alpha_n \underline{v_n}) =$
$= \alpha_1 f(\underline{v_1}) + \dots + \alpha_n f(\underline{v_n})$, ossia tali immagini determinano univocamente l'app. lineare $f \in \mathcal{L}(V,W)$. $\boxtimes$

Oss Questo teorema permette pertanto di stabilire l'esistenza e l'unicità di un'app. lineare a partire dalle immagini della base dello spazio di partenza.

Oss. Sia B' base di W, allora:

$$[f(\underline{v})]_{B'} = [x_1 f(\underline{v_1}) + \dots + x_k f(\underline{v_k})]_{B'} =$$

$$= x_1 [f(\underline{v_1})]_{B'} + \dots + x_k [f(\underline{v_k})]_{B'} =$$

$$= \left[[f(\underline{v_1})]_{B'} \middle| \dots \middle| [f(\underline{v_k})]_{B'} \right] \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}}_{[\underline{v}]_B}$$

Def. $M^{B}_{B'}(f) = \left[[f(\underline{v_1})]_{B'} \middle| \dots \middle| [f(\underline{v_k})]_{B'} \right]$ con $\underline{v_1}, \dots, \underline{v_k}$ base B.

Prop. $[f(\underline{v})]_{B'} = M^{B}_{B'}(f) \, [\underline{v}]_B$

Prop. $M^{B}_{B'} : \mathcal{L}(V, W) \to M(\dim W, \dim V, \mathbb{K})$ e' un isomorfismo.

(i) Innanzitutto $M^{B}_{B'}$ e' lineare, infatti:

- $M^{B}_{B'}(f+g) = \left[[(f+g)(\underline{v_1})]_{B'} | \dots \right] =$

$$= \left[[f(\underline{v_1})]_{B'} | \dots \right] + \left[[g(\underline{v_1})]_{B'} | \dots \right] =$$

$$= M^{B}_{B'}(f) + M^{B}_{B'}(g)$$

- $M_{B'}^{B}(\alpha f) = [[(\alpha f)(\underline{v_1})]_{B'} | \cdots] =$
$\alpha [[f(\underline{v_1})]_{B'} | \cdots] =$
$= \alpha M_{B'}^{B}(f)$

(ii) $M_{B'}^{B}$ è iniettiva, infatti:
$M_{B'}^{B}(f) = \underline{0} \implies f(\underline{v_i}) = \underline{0} \; \forall \, \underline{v_i} \in B \implies$
$\rightarrow f : \underline{V} \mapsto \underline{0}$. Poiché Ker $M_{B'}^{B}$ contiene solo l'identità, $M_{B'}^{B}$ è iniettiva.

(iii) $M_{B'}^{B}$ è surgettiva, infatti:
Sia $A \in M(\dim W, \dim V, \mathbb{K})$ e si costruisca f t.c. $f(\underline{v_J}) = \underline{w_J}$, dove $\underline{w_J} \mid [\underline{w_J}]_{B'} = A^J$.
Allora f è app. lineare e univocamente determinata.

Poiché app. lineare bigettiva, $M_{B'}^{B}$ è un isomorfismo.

$\boxtimes$

Oss $M_{e'}^{e}(f_A) = A$, con e, e' basi canoniche.

Corollario $\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim M(\dim W, \dim V, \mathbb{K}) =$

$= \dim V \cdot \dim W.$