Normalizzatore e teorema di Cayley

di Gabriel Antonio Videtta

Nota. Nel corso del documento per $(G, \cdot)$ si intenderà un qualsiasi gruppo.

Sia $X = \{H \subseteq G \mid H \leq G\}$ l'insieme dei sottogruppi di G. Allora si può costruire un'azione $\varphi : G \to S(X)$ in modo tale che:

$$g \overset{\varphi}{\mapsto} \left[H \mapsto gHg^{-1}\right].$$

Si definisce **normalizzatore** lo stabilizzatore di un sottogruppo H (e si indica con $N_G(H)$), mentre $\operatorname{Orb}(H)$ è l'insieme dei **coniugati** di H. Si osserva in modo cruciale che $H \trianglelefteq G$ se e solo se $\operatorname{Orb}(H) = \{H\}$, e quindi se e solo se $N_G(H) = G$. Analogamente si osserva che H è normale se e solo se:

$$H = \bigcup_{h \in H} \operatorname{Cl}(h).$$

Si illustra adesso un risultato principale della teoria dei gruppi che mette in relazione ogni gruppo con il proprio gruppo di bigezioni, ed ogni gruppo finito con i sottogruppi dei gruppi simmetrici.

Teorema (di Cayley)**.** Ogni gruppo è isomorfo a un sottogruppo del suo gruppo di bigezioni. In particolare, ogni gruppo finito G è isomorfo a un sottogruppo di un gruppo simmetrico.

Dimostrazione. Si consideri l'azione[1] $\varphi : G \to S(G)$ tale per cui:

$$g \overset{\varphi}{\mapsto} [h \mapsto gh].$$

Si mostra che φ è fedele[2]. Sia infatti $\varphi(g) = \mathrm{Id}$; allora vale che $ge = e \implies g = e$. Quindi $\operatorname{Ker}\varphi$ è banale, e per il Primo teorema di isomorfismo vale che:

$$G \cong \operatorname{Im}\varphi \leq S(G).$$

Se G è finito, $S(G)$ è isomorfo a S_n, dove $n := |G|$, e quindi $\operatorname{Im}\varphi$ è a sua volta isomorfo a un sottogruppo di S_n, da cui la tesi. $\square$

[1] Tale azione prende il nome di **rappresentazione regolare a sinistra**. Si può infatti definire un'azione analoga a destra ponendo $g \mapsto \left[h \mapsto hg^{-1}\right]$, costruendo dunque una *rappresentazione regolare a destra.*

[2] L'azione φ è molto più che fedele; è infatti innanzitutto libera.