

Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

22 marzo 2023

Introduzione al prodotto scalare

Nota. Nel corso del documento, per V , qualora non specificato, si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita n .

Definizione. Un **prodotto scalare** su V è una forma bilineare simmetrica φ con argomenti in V .

Esempio. Sia $\varphi : M(n, \mathbb{K})^2 \rightarrow \mathbb{K}$ tale che $\varphi(A, B) = \text{tr}(AB)$.

- ▶ $\varphi(A + A', B) = \text{tr}((A + A')B) = \text{tr}(AB + A'B) = \text{tr}(AB) + \text{tr}(A'B) = \varphi(A, B) + \varphi(A', B)$ (linearità nel primo argomento),
- ▶ $\varphi(\alpha A, B) = \text{tr}(\alpha AB) = \alpha \text{tr}(AB) = \alpha \varphi(A, B)$ (omogeneità nel primo argomento),
- ▶ $\varphi(A, B) = \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) = \varphi(B, A)$ (simmetria),
- ▶ poiché φ è simmetrica, φ è lineare e omogenea anche nel secondo argomento, e quindi è una forma bilineare simmetrica, ossia un prodotto scalare su $M(n, \mathbb{K})$.

Definizione. Si definisce prodotto scalare *canonico* di \mathbb{K}^n la forma bilineare simmetrica φ con argomenti in \mathbb{K}^n tale che:

$$\varphi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Osservazione. Si può facilmente osservare che il prodotto scalare canonico di \mathbb{K}^n è effettivamente un prodotto scalare.

- ▶ $\varphi((x_1, \dots, x_n) + (x'_1, \dots, x'_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n (x_i + x'_i) y_i = \sum_{i=1}^n [x_i y_i + x'_i y_i] = \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n x'_i y_i = \varphi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) + \varphi((x'_1, \dots, x'_n), (y_1, \dots, y_n))$ (linearità nel primo argomento),

- ▶ $\varphi(\alpha(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n \alpha x_i y_i = \alpha \sum_{i=1}^n x_i y_i = \alpha \varphi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))$ (omogeneità nel primo argomento),
- ▶ $\varphi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \varphi((y_1, \dots, y_n), (x_1, \dots, x_n))$ (simmetria),
- ▶ poiché φ è simmetrica, φ è lineare e omogenea anche nel secondo argomento, e quindi è una forma bilineare simmetrica, ossia un prodotto scalare su \mathbb{K}^n .

Esempio. Altri esempi di prodotto scalare sono i seguenti:

- ▶ $\varphi(A, B) = \text{tr}(A^\top B)$ per $M(n, \mathbb{K})$,
- ▶ $\varphi(p(x), q(x)) = p(a)q(a)$ per $\mathbb{K}[x]$, con $a \in \mathbb{K}$,
- ▶ $\varphi(p(x), q(x)) = \sum_{i=1}^n p(x_i)q(x_i)$ per $\mathbb{K}[x]$, con x_1, \dots, x_n distinti,
- ▶ $\varphi(p(x), q(x)) = \int_a^b p(x)q(x)dx$ per lo spazio delle funzioni integrabili su \mathbb{R} , con a, b in \mathbb{R} ,
- ▶ $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^\top A \underline{y}$ per \mathbb{K}^n , con $A \in M(n, \mathbb{K})$ simmetrica.

Definizione. Sia¹ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Allora un prodotto scalare φ si dice **definito positivo** se $\underline{v} \in V$, $\underline{v} \neq \underline{0} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0$. Analogamente φ è **definito negativo** se $\underline{v} \neq \underline{0} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{v}) < 0$. In generale si dice che φ è **definito** se è definito positivo o definito negativo.

Infine, φ è **semidefinito positivo** se $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \geq 0 \forall \underline{v} \in V$ (o **semidefinito negativo** se invece $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \leq 0 \forall \underline{v} \in V$). Analogamente ai prodotti definiti, si dice che φ è **semidefinito** se è semidefinito positivo o semidefinito negativo.

Esempio. Il prodotto scalare canonico di \mathbb{R}^n è definito positivo: infatti $\varphi((x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$, se $(x_1, \dots, x_n) \neq \underline{0}$.

Al contrario, il prodotto scalare $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ non è definito positivo: $\varphi((x, y), (x, y)) = 0$, $\forall (x, y) \mid x^2 = y^2$, ossia se $y = x$ o $y = -x$.

Definizione. Ad un dato prodotto scalare φ di V si associa una mappa $q : V \rightarrow \mathbb{K}$, detta **forma quadratica**, tale che $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v})$.

Osservazione. Si osserva che q non è lineare in generale: infatti $q(\underline{v} + \underline{w}) \neq q(\underline{v}) + q(\underline{w})$ in \mathbb{R}^n .

¹In realtà, la definizione è facilmente estendibile a qualsiasi campo, purché esso sia ordinato.

Definizione. Un vettore $\underline{v} \in V$ si dice **isotropo** rispetto al prodotto scalare φ se $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$.

Esempio. Rispetto al prodotto scalare $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$, i vettori isotropi sono i vettori della forma (x, y, z) tali che $x^2 + y^2 = z^2$, ossia i vettori stanti sul cono di equazione $x^2 + y^2 = z^2$.

Osservazione. Come già osservato in generale per le applicazioni multilineari, il prodotto scalare è univocamente determinato dai valori che assume nelle coppie $\underline{v}_i, \underline{v}_j$ estraibili da una base \mathcal{B} . Infatti, se $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$, $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{v}_i$ e $\underline{w} = \sum_{i=1}^k \beta_i \underline{v}_i$, allora:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_i \beta_j \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j).$$

Definizione. Sia φ un prodotto scalare di V e sia $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ una base ordinata di V . Allora si definisce la **matrice associata** a φ come la matrice:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j))_{i,j=1-n} \in M(n, \mathbb{K}).$$

Osservazione.

- $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è simmetrica, infatti $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \varphi(\underline{v}_j, \underline{v}_i)$, dal momento che il prodotto scalare è simmetrico,
- $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$.

Teorema. (di cambiamento di base per matrici di prodotti scalari) Siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ due basi ordinate di V . Allora, se φ è un prodotto scalare di V e $P = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_V)$, vale la seguente identità:

$$\underbrace{M_{\mathcal{B}'}(\varphi)}_{A'} = P^{\top} \underbrace{M_{\mathcal{B}}(\varphi)}_A P.$$

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ e $\mathcal{B}' = (\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n)$. Allora $A'_{ij} = \varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_j) = [\underline{w}_i]_{\mathcal{B}'}^{\top} A [\underline{w}_j]_{\mathcal{B}'} = (P^i)^{\top} A P^j = P_i^{\top} (AP)^j = (P^{\top} AP)_{ij}$, da cui la tesi. \square

Definizione. Si definisce **congruenza** la relazione di equivalenza \cong (denotata anche come \equiv) definita nel seguente modo su $A, B \in M(n, \mathbb{K})$:

$$A \cong B \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists P \in GL(n, \mathbb{K}) \mid A = P^{\top} B P.$$

Osservazione. Si può facilmente osservare che la congruenza è in effetti una relazione di equivalenza.

- ▶ $A = I^\top AI \implies A \cong A$ (riflessione),
- ▶ $A \cong B \implies A = P^\top BP \implies B = (P^\top)^{-1}AP^{-1} = (P^{-1})^\top AP^{-1} \implies B \cong A$ (simmetria),
- ▶ $A \cong B, B \cong C \implies A = P^\top BP, B = Q^\top CQ$, quindi $A = P^\top Q^\top CQP = (QP)^\top C(QP) \implies A \cong C$ (transitività).

Osservazione. Si osservano alcune proprietà della congruenza.

- ▶ Per il teorema di cambiamento di base del prodotto scalare, due matrici associate a uno stesso prodotto scalare sono sempre congruenti (esattamente come due matrici associate a uno stesso endomorfismo sono sempre simili).
- ▶ Se A e B sono congruenti, $A = P^\top BP \implies \text{rg}(A) = \text{rg}(P^\top BP) = \text{rg}(BP) = \text{rg}(B)$, dal momento che P e P^\top sono invertibili; quindi il rango è un invariante per congruenza. Allora si può ben definire il rango $\text{rg}(\varphi)$ di un prodotto scalare come il rango della matrice associata di φ in una qualsiasi base di V .
- ▶ Se A e B sono congruenti, $A = P^\top BP \implies \det(A) = \det(P^\top BP) = \det(P^\top) \det(B) \det(P) = \det(P)^2 \det(B)$. Quindi, per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il segno del determinante è un altro invariante per congruenza.

Definizione. Si definisce il **radicale** di un prodotto scalare φ come lo spazio:

$$V^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ \forall \underline{w} \in V\}$$

Osservazione. Il radicale del prodotto scalare canonico su \mathbb{R}^n ha dimensione nulla, dal momento che $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0 \implies \underline{v} \notin V^\perp$. In generale ogni prodotto scalare definito positivo (o negativo) è non degenere, dal momento che ogni vettore non nullo non è isotropo, e dunque non può appartenere a V^\perp .

Definizione. Un prodotto scalare si dice **degenere** se il radicale dello spazio su tale prodotto scalare ha dimensione non nulla.

Osservazione. Sia $\alpha_\varphi : V \rightarrow V^*$ la mappa² tale che $\alpha_\varphi(\underline{v}) = p$, dove $p(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \ \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$.

²In letteratura questa mappa, se invertibile, è nota come *isomorfismo musicale*, ed è in realtà indicata come b .

Si osserva che α_φ è un'applicazione lineare. Infatti, $\forall \underline{v}, \underline{w}, \underline{u} \in V$, $\alpha_\varphi(\underline{v} + \underline{w})(\underline{u}) = \varphi(\underline{v} + \underline{w}, \underline{u}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{w}, \underline{u}) = \alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{u}) + \alpha_\varphi(\underline{w})(\underline{u}) \implies \alpha_\varphi(\underline{v} + \underline{w}) = \alpha_\varphi(\underline{v}) + \alpha_\varphi(\underline{w})$. Inoltre $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\alpha_\varphi(\lambda \underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\lambda \underline{v}, \underline{w}) = \lambda \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \lambda \alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{w}) \implies \alpha_\varphi(\lambda \underline{v}) = \lambda \alpha_\varphi(\underline{v})$.

Si osserva inoltre che $\text{Ker } \alpha_\varphi$ raccoglie tutti i vettori $\underline{v} \in V$ tali che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \forall \underline{w} \in W$, ossia esattamente i vettori di V^\perp , per cui si conclude che $V^\perp = \text{Ker } \alpha_\varphi$ (per cui V^\perp è effettivamente uno spazio vettoriale). Se V ha dimensione finita, $\dim V = \dim V^*$, e si può allora concludere che $\dim V^\perp > 0 \iff \text{Ker } \alpha_\varphi \neq \{0\} \iff \alpha_\varphi$ non è invertibile (infatti lo spazio di partenza e di arrivo di α_φ hanno la stessa dimensione). In particolare, α_φ non è invertibile se e solo se $\det(\alpha_\varphi) = 0$.

Sia $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ una base ordinata di V . Si consideri allora la base ordinata del duale costruita su \mathcal{B} , ossia $\mathcal{B}^* = (\underline{v}_1^*, \dots, \underline{v}_n^*)$. Allora

$$M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\alpha_\varphi)^i = [\alpha_\varphi(\underline{v}_i)]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_1) \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_n) \end{pmatrix} \underset{\varphi \text{ è simmetrica}}{=} \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i) \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v}_n, \underline{v}_i) \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^i.$$

Quindi $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\alpha_\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Si conclude allora che φ è degenera se e solo se $\det(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = 0$ e che $V^\perp \cong \text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ mediante l'isomorfismo del passaggio alle coordinate.