# I teoremi di isomorfismo

di Gabriel Antonio Videtta

**Nota.** Nel corso del documento per $(G, \cdot)$ si intenderà un qualsiasi gruppo. Analogamente si intenderà lo stesso per $G'$.

Si illustrano i tre teoremi di isomorfismo nella loro forma più generale.

**Teorema** (Primo teorema di isomorfismo)**.** Sia $\varphi$ un omomorfismo da $G$ in $G'$. Allora, se $N \leq \operatorname{Ker}\varphi$, esiste un unico omomorfismo $f$ da $G/N$ in $G'$ che faccia commutare il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, two heads, "\pi_N"'] & G' \\
G/N \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Inoltre, tale $f$ è iniettiva se e solo se $N = \operatorname{Ker}\varphi$ e in tal caso induce il seguente isomorfismo:

$$G/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi.$$

*Dimostrazione.* Affinché il diagramma commuti, deve valere la seguente relazione:

$$\varphi(g) = f(\pi_N(g)) = f(gN).$$

Pertanto l'unica possibilità è che valga $f(gN) = \varphi(g)$. Chiaramente tale mappa è ben definita, infatti se $n \in N$, $\varphi(gn) = \varphi(g)\varphi(n) = \varphi(g)$, dacché $n$ in particolare è anche un elemento di $\operatorname{Ker}\varphi$. Inoltre $f$ è un omomorfismo, dal momento che $f(gNhN) = f(ghN) = \varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h) = f(gN)f(hN)$.

Sia $k \in \operatorname{Ker}\varphi$. Se $f$ è iniettiva, allora $f(gN) = \varphi(g) = e \implies gN = N$. Dal momento che $f(kN) = \varphi(k) = e$, $kN = N$, e quindi $k \in N$, da cui si deduce che $N = \operatorname{Ker}\varphi$. Se invece $N = \operatorname{Ker}\varphi$, $f(gN) = e \implies \varphi(g) = e \implies g \in N$, e quindi $gN = N$, l'identità di $G/N$, da cui si deduce che $f$ è iniettiva. In tal caso la restrizione sull'immagine di $f$ a $\operatorname{Im} f$, coincidente con $\operatorname{Im} f \circ \pi_N = \operatorname{Im}\varphi$ dacché $\pi_N$ è surgettiva, fornisce l'isomorfismo ricercato. $\square$

In particolare si osserva che $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}\varphi/N$, infatti:

$$\operatorname{Ker} f = \{gN \mid \varphi(g) = e\} = \{gN \mid g \in \operatorname{Ker}\varphi\} = \operatorname{Ker}\varphi/N.$$

**Teorema** (Secondo teorema di isomorfismo, o teorema del diamante)**.** Siano $H$, $N \leq G$ con $N \trianglelefteq G$. Allora[1,2]:

$$H/(H \cap N) \cong HN/N.$$

Pertanto se si considera il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
 & HN \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
H \arrow[dr, dash] & & N \arrow[dl, dash] \\
 & H \cap N &
\end{tikzcd}$$

i lati paralleli del parallelogramma ("diamante") forniscono gli isomorfismi dell'enunciato se anche $H$ è normale in $G$.

*Dimostrazione.* Si costruisce l'omomorfismo $\varphi : H \to HN/N$ tale per cui $h \mapsto hN$. Si osserva che $\varphi$ è effettivamente un omomorfismo, infatti:

$$\varphi(hh') = (hh')N = (hN)(h'N) = \varphi(h)\varphi(h').$$

Sia $hnN \in HN/N$. Allora $hnN = hN$, e quindi $\varphi(h) = hN = hnN$, da cui si deduce che $\varphi$ è surgettiva (e quindi $\operatorname{Im} \varphi = HN/N$).

Sia $\varphi(h) = e$. Allora $hN = N \implies h \in H \cap N$. Si deduce dunque che $\operatorname{Ker} \varphi = H \cap N$, da cui, applicando il Primo teorema di isomorfismo, si ottiene la tesi:

$$H/(H \cap N) \cong HN/N.$$

□

**Teorema** (Terzo teorema di isomorfismo)**.** Siano $H$ e $N$ due sottogruppi normali di $G$ e sia $N \leq H$. Allora[3]:

$$\frac{G/N}{H/N} \cong G/H.$$

---

[1]Si osserva che effettivamente $H \cap N$ è normale in $H$. Infatti se $g \in H \cap N$, allora, se $h \in H$, $hgh^{-1}$ appartiene sempre a $N$ perché $N$ è normale in $G$ e appartiene anche ad $H$ poiché è prodotto di elementi in $H$.

[2]Analogamente $N$ è normale in $HN$, essendo normale in $G$.

[3]Ci sono più modi per vedere che $H/N$ è normale in $G/N$. Un modo di vederlo si ottiene dalla dimostrazione stessa del teorema, dal momento che si ottiene che $H/N$ è il kernel dell'omomorfismo $\varphi$. Altrimenti, se $hN \in H/N$, $gNhNg^{-1}N = (ghg^{-1})N$, e poiché $H$ è normale in $G$, $ghg^{-1} \in H$, da cui $(ghg^{-1})N \in H/N$.

*Dimostrazione.* Si costruisce l'omomorfismo $\varphi : G/N \to G/H$ tale per cui $gN \mapsto gH$. Si verifica innanzitutto che la mappa $\varphi$ è ben definita:

$$gnH = gH \impliedby N \subseteq H.$$

Inoltre $\varphi$ è effettivamente un omomorfismo dal momento che:

$$\varphi(gkN) = gkH = gH\,kH = \varphi(gN)\varphi(kN).$$

Chiaramente $\varphi$ è una mappa surgettiva e quindi $\operatorname{Im}\varphi = G/H$. Allora, se $g \in \operatorname{Ker}\varphi$, $\varphi(gN) = gH = H$, e quindi $g \in H$. Pertanto $\operatorname{Ker}\varphi = \{gN \mid g \in H\} = H/N$. Si conclude allora, per il Primo teorema di isomorfismo, che:

$$\frac{G/N}{H/N} \cong G/H.$$

□