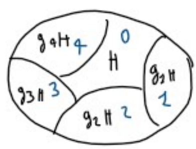
CLASSI LATERALI

02 November 2022 10:52

es.

Sia G gruppo e $H < G$:



G Possiamo costruire un gruppo che associa $g_hH + g_kH \mapsto g_{h+k}H$.

es. $G = \mathbb{Z}$ $H < G$, $H = (12)$

$G/H = \mathbb{Z}_{12}$

Gruppi quozienti

Proviamo $g_1H\, g_2H = g_1g_2H$.

E' però ben definito?

Consideriamo $g_1'H = g_1H$, $g_2'H = g_2H$.

Allora $\underbrace{g_1'H\, g_2'H}_{g_1'g_2'H} = \underbrace{g_1H\, g_2H}_{g_1g_2H}$

Notiamo però che $g_1' \in g_1H$, i.e. $g_1' = g_1h_1$ per $h_1 \in H$. Analogamente $g_2' = g_2h_2$, per $h_2 \in H$.

Quindi: $g_1'g_2'H = g_1h_1\, g_2h_2H =$

$= g_1g_2 \underbrace{g_2^{-1}h_1g_2}_{\substack{\text{coniugio su} \\ h_1 \text{ con } g_2^{-1}}} h_2H$.

Pertanto $(g_2^{-1}h_1\, g_2)\overbrace{h_2}^{\in H} \in H \iff$

$\iff$ ossia se $g_2^{-1}h_1g_2 = h \in H$

E' pertanto ben definito $\iff \forall g \in G, \forall h \in H$, $ghg^{-1} \in H$.

Def. Dato G gruppo e $H < G$, si dice che H è un SOTTOGRUPPO NORMALE se $\forall g \in G$,

Def. Dato G gruppo e $H < G$, si dice che H è un **SOTTOGRUPPO NORMALE** se $\forall g \in G$, $\underbrace{\forall h \in H,\ g h g^{-1} \in H}$. Si scriverà $H \trianglelefteq G$.

$$C_g(H) \subseteq H \quad \forall g \in G$$
$$\Updownarrow$$
$$g H g^{-1} \subseteq H$$

OSS. $\underbrace{g H g^{-1} \subseteq H}$ $\qquad \boxed{g H g^{-1} = H}$

$$g^{-1} g H g^{-1} g \subseteq g^{-1} H g \Longleftrightarrow H \subseteq g^{-1} H g$$

Dunque, se $H \trianglelefteq G$, il prodotto è ben definito su G/H.

- l'elem. neutro è eH: $gH \cdot eH = gH = gH \cdot eH$ (in particolare, $h \in H \mapsto eH$, ossia l'identità)
- associatività: $(g_1 H\, g_2 H)\, g_3 H = g_1 H\, (g_2 H\, g_3 H)$
- elem. inverso: $gH \cdot g^{-1} H = eH$

Quindi G/H è un **GRUPPO**.

es. $G = \mathbb{Z}$ $\quad H = (m)$

m = 1 $\quad \mathbb{Z}/(1) = \{0\}$

m = 0 $\quad \mathbb{Z}/(0) = \mathbb{Z}$

OSS. se G è abeliano, ogni $H < G$ è t.c. $H \trianglelefteq G$ (infatti: $g h g^{-1} = h \in H$).

es. $G = S_4$ $\qquad K = \underbrace{\{e, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}}_{\text{sottogruppo di Klein}}$

Si nota che $K < G$.
Inoltre K è abeliano.

Si dice anche $K \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
Inoltre $K \trianglelefteq G$, perché il coniugio mantiene la stessa struttura ciclica.

$4!$

la stessa struttura ciclica.

Quindi $\exists\, G/K$, che ha $\frac{4!}{4} = 6$ elementi.

Prendo $\alpha = (1,2,3)K$, $\alpha^2 = (1,2,3)^2 K =$
$= (1,3,2)K$,
$\alpha^3 = eK$

$\beta = (1,2)K$, $\beta^2 = (1,2)^2 K = eK$.

$\gamma = (1,2,3,4)K$, $\gamma^2 = (1,2,3,4)^2 K$

Nessuno ha ordine 6, quindi non è isomorfo a $\mathbb{Z}_6$ (i.e. $S_4/K \not\cong \mathbb{Z}_6$). Infatti $S_4/K \cong S_3 \dots$

Il primo Teorema di omomorfismo

Dati G_1, G_2 gruppi e un omomorfismo $f: G_1 \to G_2$, $G_1/\ker f \cong \operatorname{Imm} f$.

Dimostrazione $\ker f \trianglelefteq G_1$, infatti:
$g \underbrace{h}_{\in \ker f} g^{-1} \in \ker f$. infatti
$f(ghg^{-1}) = f(g) \overbrace{f(h)}^{e} f(g^{-1}) =$
$= f(g) f(g^{-1}) = e$.

Costruisco $\overline{f} : G_1/\ker f \to \operatorname{Imm} f$.
Pongo $\overline{f}: g_1 \ker f \longmapsto f(g_1)$; è ben definita perché dato $g_1' = g_1 h$, $h \in \ker f$, $f(g_1') = f(g_1) f(h) = f(g_1)$.

Sia $b \in \operatorname{Imm} f$, allora $\exists\, a \in G_1 \mid f(a) = b$.
Quindi: $a \ker f \mapsto b$; dunque $\overline{f}$ è surgettiva.

f scrivi il resto....