Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

22 marzo 2023

Decomposizione di Jordan, forma canonica di Jordan reale e prodotto scalare

Nota. Nel corso del documento, qualora non specificato, per f si intenderà un qualsiasi endomorfismo di V, dove V è uno spazio vettoriale di dimensione $n \in \mathbb{N}$. Inoltre per $\mathbb{K}$ si intenderà, per semplicità, un campo algebricamente chiuso; altrimenti è sufficiente considerare un campo $\mathbb{K}$ in cui i vari polinomi caratteristici esaminati si scompongono in fattori lineari.

Sia J la forma canonica di Jordan relativa a $f \in \mathrm{End}(V)$ in una base $\mathcal{B}$. Allora è possibile decomporre tale matrice in una somma di due matrici D e N tali che:

- D è diagonale e in particolare contiene tutti gli autovalori di J;
- N è nilpotente ed è pari alla matrice ottenuta ignorando la diagonale di J;
- $DN = ND$, dacché le due matrici sono a blocchi diagonali.

Pertanto è possibile considerare gli endomorfismi $\delta = M_{\mathcal{B}}^{-1}(D)$ (diagonalizzabile) e $\nu = M_{\mathcal{B}}^{-1}(N)$ (nilpotente). Si osserva allora che questi endomorfismi sono tali che $f = \delta + \nu$ (**decomposizione di Jordan** di f).

Teorema. La decomposizione di Jordan di f è unica.

Dimostrazione. Per dimostrare che la decomposizione di Jordan è unica è sufficiente mostrare che, dati δ, δ' diagonalizzabili e ν, ν' nilpotenti tali che $f = \delta + \nu = \delta' + \nu'$, deve valere necessariamente che $\delta = \delta'$ e che $\nu = \nu'$. In particolare è sufficiente dimostrare che $\delta|_{\widetilde{V_\lambda}} = \delta'|_{\widetilde{V_\lambda}}$ per ogni autovalore λ di

f, dal momento che $V = \widetilde{V_{\lambda_1}} \oplus \cdots \oplus \widetilde{V_{\lambda_k}}$, dove k è il numero di autovalori distinti di f, e così le matrici associate dei due endomorfismi sarebbero uguali in una stessa base, da cui si concluderebbe che $\delta = \delta'$, e quindi che $\nu = \nu'$.

Si osserva innanzitutto che δ (e così tutti gli altri tre endomorfismi) commuta con f: $\delta \circ f = \delta \circ (\delta + \nu) \underbrace{=}_{\delta \circ \nu = \nu \circ \delta} (\delta + \nu) \circ \delta = f \circ \delta$. Da quest'ultimo risultato consegue che $\widetilde{V_\lambda}$ è δ-invariante, dacché se f commuta con δ, anche $(f - \lambda \mathrm{Id})^n$ commuta con δ. Sia infatti $\underline{v} \in \widetilde{V_\lambda} = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})^n$, allora $(f - \lambda \mathrm{Id})^n(\delta(\underline{v})) = \delta((f - \lambda \mathrm{Id})^n(\underline{v})) = \delta(\underline{0}) = \underline{0} \implies \delta(\widetilde{V_\lambda}) \subseteq \widetilde{V_\lambda}$.

Si considerano allora gli endomorfismi $\delta|_{\widetilde{V_\lambda}}$, $\delta'|_{\widetilde{V_\lambda}}$, $\nu|_{\widetilde{V_\lambda}}$, $\nu'|_{\widetilde{V_\lambda}} \in \mathrm{End}(\widetilde{V_\lambda})$. Dal momento che $\delta|_{\widetilde{V_\lambda}}$ e $\nu|_{\widetilde{V_\lambda}}$ commutano, esiste una base $\mathcal{B}'$ di $\widetilde{V_\lambda}$ tale per cui i due endomorfismi sono triangolarizzabili simultaneamente. Inoltre, dal momento che $\delta|_{\widetilde{V_\lambda}}$ è una restrizione su δ, che è diagonalizzabile per ipotesi, anche quest'ultimo endomorfismo è diagonalizzabile; analogamente $\nu|_{\widetilde{V_\lambda}}$ è ancora nilpotente.

Si osserva dunque che $M_{\mathcal{B}'}(f|_{\widetilde{V_\lambda}}) = M_{\mathcal{B}'}(\delta|_{\widetilde{V_\lambda}}) + M_{\mathcal{B}'}(\nu|_{\widetilde{V_\lambda}})$: la diagonale di $M'_{\mathcal{B}}(\nu|_{\widetilde{V_\lambda}})$ è nulla, e $M_{\mathcal{B}'}(f|_{\widetilde{V_\lambda}})$, poiché somma di due matrici triangolari superiori, è una matrice triangolare superiore. Allora la diagonale di $M_{\mathcal{B}'}(f|_{\widetilde{V_\lambda}})$ raccoglie l'unico autovalore λ di $f|_{\widetilde{V_\lambda}}$, che dunque è l'unico autovalore anche di $\delta|_{\widetilde{V_\lambda}}$. In particolare, poiché $\delta|_{\widetilde{V_\lambda}}$ è diagonalizzabile, vale che $\delta|_{\widetilde{V_\lambda}} = \lambda \mathrm{Id}$. Analogamente $\delta'|_{\widetilde{V_\lambda}} = \lambda \mathrm{Id}$, e quindi $\delta|_{\widetilde{V_\lambda}} = \delta'|_{\widetilde{V_\lambda}}$, da cui anche $\nu|_{\widetilde{V_\lambda}} = \nu'|_{\widetilde{V_\lambda}}$. Si conclude dunque che le coppie di endomorfismi sono uguali su ogni restrizione, e quindi che $\delta = \delta'$ e $\nu = \nu'$. $\square$

Sia adesso $V = \mathbb{R}^n$. Si consideri allora la forma canonica di Jordan di f su $\mathbb{C}$ (ossia estendendo, qualora necessario, il campo a $\mathbb{C}$) e sia $\mathcal{B}$ una base di Jordan per f. Sia α un autovalore di f in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Allora, dacché $p_f \in \mathbb{R}[\lambda]$, anche $\overline{\alpha}$ è un autovalore di f. In particolare, vi è un isomorfismo tra $\widetilde{V_\alpha}$ e $\widetilde{V_{\overline{\alpha}}}$ (rappresentato proprio dall'operazione di coniugio). Quindi i blocchi di Jordan relativi ad α e ad $\overline{\alpha}$ sono gli stessi, benché coniugati.

Sia ora $\mathcal{B}'$ una base ordinata di Jordan per $f|_{\widetilde{V_\alpha}}$, allora $\overline{\mathcal{B}'}$ è anch'essa una base ordinata di Jordan per $f|_{\widetilde{V_{\overline{\alpha}}}}$. Si consideri dunque $W = \widetilde{V_\alpha} \oplus \widetilde{V_{\overline{\alpha}}}$ e la restrizione $\varphi = f|_W$. Si osserva che la forma canonica di φ si ottiene estraendo i singoli blocchi relativi ad α e $\overline{\alpha}$ dalla forma canonica di f. Se

$\mathcal{B}' = \{\underline{v_1}, ..., \underline{v_k}\}$, si considera $\mathcal{B}'' = \{\Re(\underline{v_1}), \Im(\underline{v_1}), ..., \Re(\underline{v_k}), \Im(\underline{v_k})\}$, ossia i vettori tali che $\underline{v_i} = \Re(\underline{v_i}) + i\Im(\underline{v_i})$. Questi vettori soddisfano due particolari proprietà:

- $\Re(\underline{v_i}) = \dfrac{\underline{v_i} + \overline{\underline{v_i}}}{2}$,
- $\Im(\underline{v_i}) = \dfrac{\underline{v_i} - \overline{\underline{v_i}}}{2i} \underbrace{=}_{\frac{1}{i}=-i} -\dfrac{\underline{v_i} - \overline{\underline{v_i}}}{2} i.$

In particolare $\mathcal{B}''$ è un base di W, dal momento che gli elementi di $\mathcal{B}''$ generano W e sono tanti quanto la dimensione di W, ossia $2k$. Si ponga $\alpha = a + bi$. Se $\underline{v_i}$ è autovettore si conclude che:[1]

- $f(\Re(\underline{v_i})) = \frac{1}{2}\left(f(\underline{v_i}) + f(\overline{\underline{v_i}})\right) = \frac{1}{2}\left(\alpha\underline{v_i} + \overline{\alpha\underline{v_i}}\right) = \frac{1}{2}\left(a\underline{v_i} + bi\underline{v_i} + a\overline{\underline{v_i}} - bi\overline{\underline{v_i}}\right) = a\frac{\underline{v_i}+\overline{\underline{v_i}}}{2} + b\frac{\underline{v_i}-\overline{\underline{v_i}}}{2}i = a\Re(\underline{v_i}) - b\Im(\underline{v_i})$,
- $f(\Im(\underline{v_i})) = \frac{1}{2i}\left(f(\underline{v_i}) - f(\overline{\underline{v_i}})\right) = \frac{1}{2i}\left(\alpha\underline{v_i} - \overline{\alpha\underline{v_i}}\right) = \frac{1}{2i}\left(a\underline{v_i} + bi\underline{v_i} - a\overline{\underline{v_i}} + bi\overline{\underline{v_i}}\right) = b\frac{\underline{v_i}+\overline{\underline{v_i}}}{2} + a\frac{\underline{v_i}-\overline{\underline{v_i}}}{2i} = b\Re(\underline{v_i}) + a\Im(\underline{v_i})$.

Altrimenti, se non lo è:

- $f(\Re(\underline{v_i})) = \frac{1}{2}\left(f(\underline{v_i}) + f(\overline{\underline{v_i}})\right) = \frac{1}{2}\left(\alpha\underline{v_i} + \underline{v_{i-1}} + \overline{\alpha\underline{v_i}} + \overline{\underline{v_{i-1}}}\right) = \frac{1}{2}\left(a\underline{v_i} + bi\underline{v_i} + a\overline{\underline{v_i}} - bi\overline{\underline{v_i}}\right) + \Re(\underline{v_{i-1}}) = a\frac{\underline{v_i}+\overline{\underline{v_i}}}{2} + b\frac{\underline{v_i}-\overline{\underline{v_i}}}{2}i + \Re(\underline{v_{i-1}}) = a\Re(\underline{v_i}) - b\Im(\underline{v_i}) + \Re(\underline{v_{i-1}})$,
- $f(\Im(\underline{v_i})) = \frac{1}{2i}\left(f(\underline{v_i}) - f(\overline{\underline{v_i}})\right) = \frac{1}{2i}\left(\alpha\underline{v_i} + \underline{v_{i-1}} - \overline{\alpha\underline{v_i}} - \overline{\underline{v_{i-1}}}\right) = \frac{1}{2i}\left(a\underline{v_i} + bi\underline{v_i} - a\overline{\underline{v_i}} + bi\overline{\underline{v_i}}\right) + \Im(\underline{v_{i-1}}) = b\frac{\underline{v_i}+\overline{\underline{v_i}}}{2} + a\frac{\underline{v_i}-\overline{\underline{v_i}}}{2i} + \Im(\underline{v_{i-1}}) = b\Re(\underline{v_i}) + a\Im(\underline{v_i}) + \Im(\underline{v_{i-1}})$.

Quindi la matrice associata nella base $\mathcal{B}''$ è la stessa di f relativa ad α dove si amplifica la matrice sostituendo ad α la matrice[2] $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ e ad 1 la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[1]Si è in seguito utilizzato più volte l'identità $f(\overline{\underline{v_i}}) = \overline{f(\underline{v_i})}$.

[2]Si verifica facilmente che lo spazio delle matrici $\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$ è isomorfo a $\mathbb{C}$ secondo la mappa $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a + bi$.

Esempio. Si consideri la matrice $M = \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$. Si osserva che M è composta da due blocchi che sono uno il blocco coniugato dell'altro. Quindi M è simile alla matrice reale $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Definizione. Un **prodotto scalare** su V è una forma bilineare simmetrica φ con argomenti in V.

Esempio. Sia $\varphi : M(n, \mathbb{K})^2 \to \mathbb{K}$ tale che $\varphi(A, B) = \operatorname{tr}(AB)$.

▶ $\varphi(A + A', B) = \operatorname{tr}((A + A')B) = \operatorname{tr}(AB + A'B) = \operatorname{tr}(AB) + \operatorname{tr}(A'B) = \varphi(A, B) + \varphi(A', B)$ (linearità nel primo argomento),
▶ $\varphi(\alpha A, B) = \operatorname{tr}(\alpha AB) = \alpha \operatorname{tr}(AB) = \alpha\varphi(A, B)$ (omogeneità nel secondo argomento),
▶ $\varphi(A, B) = \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) = \varphi(B, A)$ (simmetria),
▶ poiché φ è simmetrica, φ è lineare e omogenea anche nel secondo argomento, e quindi è una forma bilineare simmetrica, ossia un prodotto scalare su $M(n, \mathbb{K})$.

Definizione. Si definisce prodotto scalare *canonico* di $\mathbb{K}^n$ la forma bilineare simmetrica φ con argomenti in $\mathbb{K}^n$ tale che:

$$\varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Osservazione. Si può facilmente osservare che il prodotto scalare canonico di $\mathbb{K}^n$ è effettivamente un prodotto scalare.

▶ $\varphi((x_1, ..., x_n) + (x'_1, ..., x'_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^{n}(x_i + x'_i)y_i = \sum_{i=1}^{n} [x_i y_i + x'_i y_i] = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} x'_i y_i = \varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) + \varphi((x'_1, ..., x'_n), (y_1, ..., y_n))$ (linearità nel primo argomento),
▶ $\varphi(\alpha(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i y_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \alpha\varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n))$ (omogeneità nel primo argomento),
▶ $\varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \varphi((y_1, ..., y_n), (x_1, ..., x_n))$ (simmetria),

▶ poiché φ è simmetrica, φ è lineare e omogenea anche nel secondo argomento, e quindi è una forma bilineare simmetrica, ossia un prodotto scalare su $\mathbb{K}^n$.

Esempio. Altri esempi di prodotto scalare sono i seguenti:

▶ $\varphi(A, B) = \operatorname{tr}(A^\top B)$ per $M(n, \mathbb{K})$,
▶ $\varphi(p(x), q(x)) = p(a)q(a)$ per $\mathbb{K}[x]$, con $a \in \mathbb{K}$,
▶ $\varphi(p(x), q(x)) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)q(x_i)$ per $\mathbb{K}[x]$, con x_1, ..., x_n distinti,
▶ $\varphi(p(x), q(x)) = \int_a^b p(x)q(x)dx$ per lo spazio delle funzioni integrabili su $\mathbb{R}$, con a, b in $\mathbb{R}$,
▶ $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^\top A \underline{y}$ per $\mathbb{K}^n$, con $A \in M(n, \mathbb{K})$ simmetrica.

Definizione. Sia[3] $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Allora un prodotto scalare φ è **definito positivo** se $\underline{v} \neq \underline{0} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0$.

Esempio. Il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$ è definito positivo: infatti $\varphi((x_1, ..., x_n), (x_1, ..., x_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \iff x_i = 0, \forall 1 \leq i \leq n \iff (x_1, ..., x_n) = \underline{0}$.

Al contrario, il prodotto scalare $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 - x_2y_2$ non è definito positivo: $\varphi((x, y), (x, y)) = 0, \forall\ (x, y) \mid x^2 = y^2$, ossia se $y = x$ o $y = -x$.

Definizione. Dato un prodotto scalare φ di V, ad ogni vettore $\underline{v} \in V$ si associa una **forma quadratica** $q : V \to \mathbb{K}$ tale che $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v})$.

Osservazione. Si osserva che q non è lineare in generale: infatti $q(\underline{v}+\underline{w}) \neq q(\underline{v}) + q(\underline{w})$ in $\mathbb{R}^n$.

Definizione. Un vettore $\underline{v} \in V$ si dice **isotropo** rispetto al prodotto scalare φ se $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$.

Esempio. Rispetto al prodotto scalare $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3$, i vettori isotropi (x, y, z) sono quelli tali che $x^2 + y^2 = z^2$, ossia i vettori stanti sul cono di eq. $x^2 + y^2 = z^2$.

Osservazione. Come già osservato in generale per le app. multilineari, il prodotto scalare è univocamente determinato dai valori che assume nelle coppie $\underline{v_i}, \underline{v_j}$ estraibili da una base $\mathcal{B}$. Infatti, se $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_k})$, $\underline{v} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underline{v_i}$ e $\underline{w} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \underline{v_i}$, allora:

[3]In realtà, la definizione è facilmente estendibile a qualsiasi campo, purché esso sia ordinato.

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq k} \alpha_i \beta_j \, \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}).$$

Definizione. Sia φ un prodotto scalare di V e sia $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ una base ordinata di V. Allora si denota con **matrice associata** a φ la matrice:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}))_{i,\, j=1—n} \in M(n, \mathbb{K}).$$

Osservazione. Si possono fare alcune osservazioni riguardo $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

► $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è simmetrica, infatti $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi(\underline{v_j}, \underline{v_i})$ per definizione di prodotto scalare,
► $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}$.

Teorema. (di cambiamento di base per matrici di prodotti scalari) Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi ordinate di V. Allora, se φ è un prodotto scalare di V e $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$, vale la seguente identità:

$$\underbrace{M_{\mathcal{B}'}(\varphi)}_{A'} = P^{\top} \underbrace{M_{\mathcal{B}}}_{A} P.$$

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ e $\mathcal{B}' = (\underline{w}_1, ..., \underline{w}_n)$. Allora $A'_{ij} = \varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_j) = [\underline{w}_i]_{\mathcal{B}}^{\top} A[\underline{w}_j]_{\mathcal{B}} = (P^i)^{\top} A P^j = P_i^{\top}(AP)^j = (P^{\top}AP)_{ij}$, da cui la tesi. □

Definizione. Si definisce **congruenza** la relazione di equivalenza $\sim$ definita nel seguente modo su $A, B \in M(n, \mathbb{K})$:

$$A \sim B \iff \exists\, P \in GL(n, \mathbb{K}) \mid A = P^{\top}AP.$$

Osservazione. Si può facilmente osserva che la congruenza è in effetti una relazione di equivalenza.

► $A = I^{\top}AI \implies A \sim A$ (riflessione),
► $A \sim B \implies A = P^{\top}BP \implies B = (P^{\top})^{-1}AP^{-1} = (P^{-1})^{\top}AP^{-1} \implies B \sim A$ (simmetria),
► $A \sim B \implies A = P^{\top}BP$, $B \sim C \implies B = Q^{\top}CQ$, quindi $A = P^{\top}Q^{\top}CQP = (QP)^{\top}C(QP)$ (transitività).

Osservazione. Si osservano alcune proprietà della congruenza.

▶ Per il teorema di cambiamento di base del prodotto scalare, due matrici associate a uno stesso prodotto scalare sono sempre congruenti (esattamente come due matrici associate a uno stesso endomorfismo sono sempre simili).
▶ Se A e B sono congruenti, $A = P^\top BP \implies \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(P^\top BP) = \operatorname{rg}(BP) = \operatorname{rg}(B)$, dal momento che P e $P^\top$ sono invertibili; quindi il rango è un invariante per congruenza. Allora è ben definito il rango $\operatorname{rg}(\varphi)$ di un prodotto scalare come il rango di una sua qualsiasi matrice associata.
▶ Se A e B sono congruenti, $A = P^\top BP \implies \det(A) = \det(P^\top BP) = \det(P^\top)\det(B)\det(P) = \det(P)^2\det(B)$. Quindi, per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il segno del determinante è invariante per congruenza.

Definizione. Si dice **radicale** di un prodotto scalare φ lo spazio:

$$V^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0, \forall\, \underline{w} \in V\}$$

Osservazione. Il radicale di $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico ha dimensione nulla, dal momento che $\forall\, \underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$, $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0$.

Definizione. Un prodotto scalare si dice **degenere** se il radicale dello spazio su tale prodotto scalare ha dimensione non nulla.

Osservazione. Si definisce l'applicazione lineare $\alpha_\varphi : V \to V^*$ in modo tale che $\alpha_\varphi(\underline{v}) = p$, dove $p(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$.

Allora $V^\perp$ altro non è che $\operatorname{Ker} \alpha_\varphi$. Se V ha dimensione finita, $\dim V = \dim V^*$, e si può allora concludere che $\dim V^\perp > 0 \iff \operatorname{Ker} \alpha_\varphi \neq \{\underline{0}\} \iff \alpha_\varphi$ non è invertibile (infatti lo spazio di partenza e di arrivo di α_φ hanno la stessa dimensione). In particolare, α_φ non è invertibile se e solo se $\det(\alpha_\varphi) = 0$.

Sia $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ una base ordinata di V. Si consideri allora la base ordinata del duale costruita su $\mathcal{B}$, ossia $\mathcal{B}^* = (\underline{v_1^*}, ..., \underline{v_n^*})$. Allora $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\alpha_\varphi)^i = [\alpha_\varphi(\underline{v_i})]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_1}) \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_n}) \end{pmatrix} \underbrace{=}_{\varphi \text{ è simmetrica}} \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v_n}, \underline{v_i}) \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^i$.
Quindi $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}^*}(\alpha_\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Si conclude allora che φ è degenere se e solo se $\det(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = 0$ e che $V^\perp \cong \operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ con l'isomorfismo è il passaggio alle coordinate.