Multilineari e determinante

Sia f alternante, allora $f|_{B\times\cdots\times B}$ è t.c.

(i) $f(\underline{v}_{\sigma(1)}, \dots, \underline{v}_{\sigma(i)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, f(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i)$ $\forall \sigma \in S_i$

(ii) $f(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i) = 0$ se $\exists\, i = j$

Corollario Se $h > \dim V = n$, $\mathrm{Alt}^h(V) = \Lambda^h V^* = \{\underline{0}\}$

Almeno un argomento si ripete sempre. Per (ii), allora ogni alternante è zero. $\square$

Costruiamo delle funz. che verificano (i) e (ii). Si sceglie un sottinsieme di h indici $I \subset \{1, \dots, n\}$. $I = \{i_1, \dots, i_h\} \mid i_1 < \dots < i_h$.

Lemma 1 $\underline{v}_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \underline{v}_{i_h}^* \overset{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \underline{v}_{i_{\sigma(1)}}^* \otimes \dots \otimes \underline{v}_{i_{\sigma(h)}}^*$

Sia $(\underline{v}_{j_1}, \dots, \underline{v}_{j_h}) \in B^h$. Se $j_1, \dots, j_h$ è una permutazione σ di I, $\underline{v}_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \underline{v}_{i_h}^* (\underline{v}_{j_1}, \dots, \underline{v}_{j_h}) = \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma)}_{\sigma \mid B \mapsto I}$, altrimenti è zero.

$$\underline{v}_{i_1}^* \otimes \dots \otimes \underline{v}_{i_h}^* (\underline{v}_{j_1}, \dots, \underline{v}_{j_h}) = \underline{v}_{i_1}^*(\underline{v}_{j_1}) \cdot \dots \cdot \underline{v}_{i_h}^*(\underline{v}_{j_h}) =$$
$$= \delta_{i_1 j_1} \cdot \dots \cdot \delta_{i_h j_h}.$$

Quindi, se esiste, solo una permutazione ritorna 1 nella sommatoria, da cui il fattore $\mathrm{sgn}(\sigma)$.

Lemma 2 I $\underline{v}_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \underline{v}_{i_h}^*$ al variare di I sono una base di $\mathrm{Alt}^h(V) = \Lambda^h V^*$.

(i) Sia $$f = \underbrace{\sum_{1 \le i_1 \le \dots \le h}}_{|I| = h} a_{i_1 \dots i_n} \underline{v}_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \underline{v}_{i_h}^* = 0.$$

Valutando f in $(\underline{v}_{J_1}, \dots, \underline{v}_{J_h}) \mid \underline{J_1} < \dots < \underline{J_n}$ rimane solo $a_{J_1 \dots J_n}$ se è permutazione di I, oppure 0. In ogni caso tutti gli $a_{i_1 \dots i_h}$ sono 0. Pertanto i $\underline{v}_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \underline{v}_{i_h}^*$ sono lin. ind.

(ii) Sia $f \in \mathrm{Alt}^h(V)$, allora si verifica che:

$$f = \underbrace{\sum_{1 \le i_1 \le \dots \le h}}_{|I| = h} f(\underbrace{\underline{v}_{i_1}, \dots, \underline{v}_{i_h}}_{B}) \underline{v}_{i_1}^* \wedge \dots \wedge \underline{v}_{i_h}^*$$

Quindi è base.

$\boxtimes$

Corollario $\dim(\mathrm{Alt}^h(V)) = \binom{n}{h}$

Oss. $\min(\dim(\mathrm{Alt}^h(V))) = 1$. Succede per $h=0$ e $h=n$.

Oss. Per $\mathrm{Alt}^n(V)$, $\underline{v_1}^* \wedge \dots \wedge \underline{v_n}^*$ è base.

Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. $A_i \in \mathbb{K}^n \cong V$. Consideriamo $\Lambda^n V^* = \mathrm{Alt}^n(V)$.

Sia $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ base canonica di V.

Def. $\det : \overbrace{\mathbb{K}^n \times \dots \times \mathbb{K}^n}^{n \text{ volte}} \to \mathbb{K}$ e' l'unica funzione multilineare alternante delle righe di A, che vale 1 in $(e_1, \dots, e_n)$ (i.e. $\det(Id) = 1$).

Lemma $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}$.

Infatti $\det A = \det(A_1, \dots, A_n) = (\underline{e_1}^* \wedge \dots \wedge \underline{e_n}^*)(A_1, \dots, A_n) =$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)(\underline{e_{\sigma(1)}}^* \otimes \dots \otimes \underline{e_{\sigma(n)}}^*)(A_1, \dots, A_n).$$

Sia $A_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}\, \underline{e_j}$. Allora:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)(\underline{e_{\sigma(1)}}^* \otimes \dots \otimes \underline{e_{\sigma(n)}}^*)(A_1, \dots, A_n) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)(\underline{e_{\sigma(1)}}^* \otimes \dots \otimes \underline{e_{\sigma(n)}}^*)(a_{1\sigma(1)}\, \underline{e_{\sigma(1)}}, \dots) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}. \qquad \square$$

OSS. (i) scambiare due righe cambia di segno il det.

(ii) se una riga è nulla, il det. è zero

(iii) sommare λ volte una riga ad un'altra riga distinta non varia il determinante

(iv) $\det(A_1, \dots, \lambda A_i, \dots) = \lambda \det(A_1, \dots, A_i, \dots)$

OSS. 2 Se S è una forma a scala di A mai moltiplicata, $\det A = (-1)^k \det S$ dove k è il numero di righe scambiat

OSS. 3 $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_n \det(Id) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$

OSS. 4 A non singolare $\overset{def}{\iff}$ A invertibile $\iff rg(A) = n \iff$ $\iff \det A \neq 0$. Infatti $A = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & \vdots \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{pmatrix}$ con $p_i \neq 0 \ \forall \ 1 \leq i \leq n$ si può diagonalizzare nella forma $\begin{pmatrix} p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{pmatrix}$, cui determinante è $p_1 \cdot \dots \cdot p_n \neq 0$. Altrimenti, se non è invertibile, una riga è nulla $\Rightarrow \det A = 0$.

Teorema $\det A = \det {}^tA$

$A = (a_{ij})$, ${}^tA = (a_{ji})$

$$\det {}^tA = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a'_{1\sigma(1)} \cdots a'_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma)}_{= \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})} a_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)n} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})\, a_{\sigma(1)\, \sigma^{-1}(\sigma(1))} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)\, \sigma^{-1}(\sigma(n))} =$$

$$= \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau)\, a_{1\tau(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\tau(n)} = \det(A).$$

$\boxtimes$

Def. Si dice **complemento algebrico** o **cofattore** di a_{ij} la matrice ottenuta eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna.

Teorema (Sviluppo di Laplace)

Si verifica che $\varphi_i(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_{ij}$ è multilineare alternante che vale 1 nella base. Poiché il det. è l'unica multilin. alt. di tale forma, si ha $\varphi_i(A) = \det(A)$. $\boxtimes$

Teorema (di Binet) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Se A non è invertibile, neanche AB lo è ($\operatorname{rg}(AB) \leq \operatorname{rg}(A) < n$), quindi $\det(AB) = 0 = \underbrace{\det(A)}_{=0}\det(B)$. Altrimenti $\det(A) \neq 0$. Si consideri $\varphi(X) = \dfrac{\det(AX)}{\det(A)}$: φ è mult. alter. e vale 1 in I_n. Quindi, come prima, deve valere $\varphi = \det$; quindi $\det(B) \underbrace{=}_{\varphi} \dfrac{\det(AB)}{\det(A)}$, da cui la tesi. $\boxtimes$