Appunti di Geometria

Gabriel Antonio Videtta

15 settembre 2022

Indice

1 Assiomi della geometria

1.1 I concetti primitivi

La geometria euclidea dispone di tre principali concetti primitivi, ossia concetti inesprimibili per definizione, ma assunti come definiti e chiari. Essi sono:

- il punto;
- la retta;
- il piano.

Per indicare questi tre concetti sono in atto alcune convenzioni stilistiche:

- i punti vengono indicati con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino (A, B, C, ...);
- le rette vengono indicate con le lettere minuscole dell'alfabeto latino (a, b, c, ...);
- i piani vengono indicati con le lettere minuscole dell'alfabeto greco (α, β, γ, ...).

A partire da questi concetti è possibile stabilire gli assiomi della geometria euclidea.

1.2 Gli assiomi di appartenenza

Gli assiomi di appartenenza stabiliscono le relazioni tra i tre concetti primitivi prima elencati.

Assioma 1.1 (Primo assioma di relazione di insieme)**.** *Ogni piano è un insieme infinito di punti* ($\forall\, \alpha,\ |\alpha| = \infty$).

Assioma 1.2 (Secondo assioma di relazione di insieme)**.** *Ogni retta è un sottoinsieme di un piano* ($\forall\, r\ \exists!\, \alpha \mid r \in \alpha$).

Assioma 1.3 (Primo assioma di appartenenza della retta)**.** *A ogni retta appartengono almeno due punti distinti* ($\forall\, r\ \exists\, A, B \mid A \neq B \wedge A, B \in r$).

Assioma 1.4 (Secondo assioma di appartenenza della retta)**.** *Dati due punti distinti, esiste una e una sola retta a cui essi appartengano contemporaneamente* ($A \neq B \implies \exists!\, r \mid A, B \in r$).

Teorema 1.1. *Date due rette distinte, esse possono incontrarsi in al più un punto* ($r \neq s \implies |r \cap s| \leq 1$).

Dimostrazione. Qualora le due rette dovessero incontrarsi in più di un punto, esisterebbero allora due punti appartenenti ad ambo le rette. Tuttavia, per l'**Assioma 1.4**, attraverso la congiunzione di tali due punti si può determinare una e una sola retta, generando una contraddizione. ■

A partire da questo teorema si possono definire tre combinazioni di rette.

Definizione 1.1 (Rette coincidenti)**.** Due rette si dicono coincidenti se e solo se condividono il medesimo sottoinsieme del piano ($r \equiv s \iff \nexists P \in r \mid P \notin s\ \wedge\ \nexists P \in s \mid P \notin r$).

Definizione 1.2 (Rette incidenti)**.** Due rette si dicono incidenti se e solo se condividono un solo punto del piano.

Definizione 1.3 (Rette parallele)**.** Due rette si dicono parallele se e solo se non condividono alcun punto del piano. ($r \parallel s \iff |r \cap s| = 0$).

Definizione 1.4 (Punti non allineati)**.** Tre o più punti si dicono non allineati se non esiste alcuna retta che li contenga tutti contemporaneamente.

Assioma 1.5. *Tre punti non allineati definiscono sempre e univocamente un piano* ($A, B, C \mid \nexists r \mid A, B, C \in r \implies \exists \alpha \mid A, B, C \in \alpha$).

1.3 Gli assiomi di ordine

Un verso di percorrenza in una retta r viene istituito come un sistema mediante il quale è sempre possibile stabilire una relazione di ordine tra due punti distinti A e B appartenenti alla medesima retta in modo tale che $A > B$ o $A < B$.

Stabilito un verso di percorrenza di una retta, vengono postulati due assiomi detti di ordine che fanno riferimento a tale verso di percorrenza.

Assioma 1.6 (Primo assioma di ordine della retta)**.** *Presi due punti distinti A e B appartenenti alla retta r tali che $A < B$, allora esiste un punto C, sempre appartenente alla retta r, tale che $A < C < B$* ($A, B \in r \mid A < B \implies \exists C \in r \mid A < C < B$).

Assioma 1.7 (Secondo assioma di ordine della retta)**.** *Dato un punto C appartenente alla retta r, esistono sempre due punti A e B, sempre appartenenti a r, tali che $A < C < B$.* ($C \in r \implies \exists A, B \in r \mid A < C < B$).

Teorema 1.2. *Ad ogni retta appartengono infiniti punti.*

Dimostrazione. Qualora ad una retta appartenesse un numero finito di punti, stabilito un verso di percorrenza, sarebbe possibile enumerare tali punti in ordine. Presi i primi due punti minori A e B, ossia tali che non esista alcun punto C tale che $A < C < B$, per l'**Assioma 1.7** tra di essi deve esistere un punto C tale che $A < C < B$, entrando in piena contraddizione con l'assunto. ∎

Teorema 1.3. *Ogni punto P del piano appartiene ad un numero infinito di rette.*

Dimostrazione. Per l'**Assioma 1.5**, per ogni punto P del piano devono esistere altri due punti A e B tali che la retta che li congiunge non contenga P.

Si considerino le rette a, che congiunge P e A, e d, che congiunge A e B. Per conseguenza del **Teorema 1.2**, per d passano infiniti punti, i quali, presi singolarmente e congiunti a P, definiscono allo stesso modo infinite rette. ∎