Scheda riassuntiva di Geometria 2

Geometria proiettiva

Spazi e trasformazioni proiettive

Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia V uno spazio proiettivo. Sia $\sim$ la seguente relazione di equivalenza su $V \setminus \{\underline{0}\}$ tale per cui

$$\underline{v} \sim \underline{w} \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^* \mid \underline{v} = \lambda \underline{w}.$$

Allora si definisce lo **spazio proiettivo** associata a V, denotato con $\mathbb{P}(V)$, come:

$$\mathbb{P}(V) = V \setminus \{\underline{0}\}/\sim.$$

In particolare esiste una bigezione tra gli elementi dello spazio proiettivo e le rette di V (i.e. i sottospazi di V con dimensione 1). Si definisce la *dimensione* di $\mathbb{P}(V)$ come:

$$\dim \mathbb{P}(V) := \dim V - 1.$$

Gli spazi proiettivi di dimensione 1 sono detti *rette proiettive*, mentre quelli di dimensione 2 *piani*. Si dice **spazio proiettivo standard di dimensione** n lo spazio proiettivo associato a $\mathbb{K}^{n+1}$, e viene denotato come $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) := \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$. Si indica con π la proiezione al quoziente tramite $\sim$, ossia:

$$\pi(W) = \{[\underline{w}] \mid \underline{w} \in W\}.$$

Si dice **sottospazio proiettivo** un qualsiasi sottoinsieme S di $\mathbb{P}(V)$ tale per cui esista un sottospazio vettoriale W di V tale per cui $S = \pi(W \setminus \{\underline{0}\})$, e si scrive $S = \mathbb{P}(W)$, con:

$$\dim S = \dim W - 1.$$

In particolare, tramite π si descrive una bigezione tra i sottospazi vettoriali di V e i sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$.

L'intersezione di sottospazi proiettivi è ancora un sottospazio proiettivo ed è indotto dall'intersezione degli spazi vettoriali che generano i singoli sottospazi proiettivi. Pertanto, se $F \subseteq \mathbb{P}(V)$, è ben definito il seguente sottospazio:

$$L(F) = \bigcap_{\substack{F \subseteq S_i \\ S_i \text{ ssp. pr.}}} S_i,$$

ossia l'intersezione di tutti i sottospazi proiettivi che contengono F. Si scrive $L(S_1, \ldots, S_n)$ per indicare $L(S_1 \cup \cdots \cup S_n)$. Se $S_1 = \mathbb{P}(W_1)$, ..., $S_n = \mathbb{P}(W_n)$, allora vale che:

$$L(S_1, \ldots, S_n) = \mathbb{P}(W_1 + \ldots + W_n).$$

Vale pertanto la **formula di Grassmann proiettiva**:

$$\dim L(S_1, S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$

Allora, se $\dim S_1 + \dim S_2 \geq \dim \mathbb{P}(V)$ (si osservi che è $\geq$ e non $>$ come nel caso vettoriale, dacché un sottospazio di dimensione zero è comunque un punto in geometria proiettiva), vale necessariamente che:

$$S_1 \cap S_2 \neq \varnothing,$$

infatti $\dim S_1 \cap S_2 = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim L(S_1, S_2) \geq \dim S_1 + \dim S_2 - \dim \mathbb{P}(V) \geq 0$. In particolare, in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, questo implica che due rette proiettive distinte si incontrano sempre in un unico punto (infatti $1 + 1 \geq 2$).

Sia W uno spazio vettoriale. Una mappa $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(W)$ si dice **trasformazione proiettiva** se è tale per cui esiste un'applicazione lineare $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ che soddisfa la seguente identità:

$$f([\underline{v}]) = [\varphi(\underline{w})],$$

dove con $[\cdot]$ si denota la classe di equivalenza in $\mathbb{P}(V)$. Una trasformazione proiettiva invertibile da $\mathbb{P}(V)$ in $\mathbb{P}(W)$ si dice **isomorfismo proiettivo**. Una trasformazione proiettiva da $\mathbb{P}(V)$ in $\mathbb{P}(V)$ si dice **proiettività**.

- Se f è una trasformazione proiettiva, allora φ è necessariamente iniettiva (altrimenti l'identità non sussisterebbe, dacché $[\underline{0}]$ non esiste – la relazione d'equivalenza $\sim$ è infatti definita su $V \setminus \{\underline{0}\}$).
- Allo stesso tempo, un'applicazione lineare φ iniettiva induce sempre una trasformazione proiettiva f,
- Se f è una trasformazione proiettiva, allora f è in particolare anche iniettiva (infatti $[\varphi(\underline{v})] = [\varphi(\underline{w})] \implies \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^* \mid \underline{v} = \lambda \underline{w} \implies \underline{v} \sim \underline{w}$),
- La composizione di due trasformazioni proiettive è ancora una trasformazione proiettiva ed è indotta dalla composizione delle app. lineari associate alle trasformazioni di partenza,
- L'identità Id è una proiettività di $\mathbb{P}(V)$, ed è indotta dall'identità di V.

Poiché allora nelle proiettività di V esiste un'identità, un inverso e vale l'associatività nella composizione, si definisce $\mathbb{P}\mathrm{GL}(V)$ come il gruppo delle proiettività di V rispetto alla composizione.

Sono inoltre equivalenti i seguenti fatti:

(i) f è surgettiva,

(ii) f è bigettiva,

(iii) $\dim \mathbb{P}(V) = \dim \mathbb{P}(W)$,

(iv) f è invertibile e f^{-1} è una trasformazione proiettiva.

In particolare φ^{-1} induce esattamente f^{-1}.

- I punti fissi di f sono indotti esattamente dalle rette di autovettori di φ (infatti $\varphi(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \implies f([\underline{v}]) = [\underline{v}]$),
- In particolare, $f \in \mathbb{P}\mathrm{GL}(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ ammette sempre un punto fisso se n è pari (il polinomio caratteristico di φ ha grado dispari, e quindi ammette una radice in $\mathbb{R}$),
- Se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, f ammette sempre un punto fisso (il polinomio caratteristico di φ ha tutte le radici in $\mathbb{K}$).

Ad opera di Gabriel Antonio Videtta, https://poisson.phc.dm.unipi.it/~videtta/.
Reperibile su https://notes.hearot.it, nella sezione *Secondo anno → Geometria 2 → Scheda riassuntiva.*