

Prop. Sia (x_m) una succ. a valori in \mathbb{R} . Sia $\varphi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty) \mid \varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0^+$. Sia (x_m) tale che $\forall \varepsilon > 0 \exists m_0 \in \mathbb{N} \mid m \geq m_0 \Rightarrow |x_m - L| \leq \varphi(\varepsilon)$, con $L \in \mathbb{R}$. Allora $(x_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} L$.

Poiché $\varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0^+$, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid \overbrace{t}^{\varepsilon(0, \infty)} \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow \overbrace{\varphi(t)}^{\varepsilon(0, \infty)} \leq \varepsilon$ (1).

In particolare, $\varphi(\delta_\varepsilon) \leq \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. Allora, per ipotesi, dato $\varepsilon > 0$ e detto δ_ε il valore dell'asserzione (1), $\exists m_{\delta_\varepsilon} \in \mathbb{N}$ - dacché $\delta_\varepsilon > 0$ - tale che $m \geq m_{\delta_\varepsilon} \Rightarrow |x_m - L| \leq \varphi(\delta_\varepsilon) \leq \varepsilon$, ossia $\forall \varepsilon > 0 \exists m_0 := m_{\delta_\varepsilon} \mid m \geq m_0 \Rightarrow |x_m - L| \leq \varepsilon$, da cui la tesi. \square