Gruppi simmetrici

28 October 2022 09:13

$$S_n = \{\, \sigma : \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\} \text{ bigettiva} \,\}$$

es. $\sigma = (1,5)(2,4,6) \in S_6$

$1 \longmapsto 5$

$2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6$

altrimenti

$$\sigma = \begin{array}{cccccc} (5, & 4, & 3, & 6, & 1, & 2) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

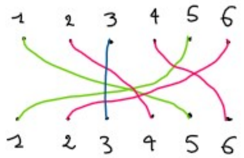


GRAFICO A TRECCIA

Def. Sia $\sigma \in S_n$. Un'inversione di σ è una coppia (i,j) con $1 \leq i < j \leq n \mid \sigma(i) > \sigma(j)$. Ovverosia un'inversione è una coppia di linee che si incrocia nel grafico a treccia.

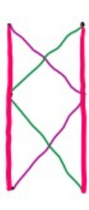
Def. $inv(\sigma)$ conta il numero di inversioni di σ.

Oss. (i) $inv(id) = 0$

(ii) $inv(\sigma) = inv(\sigma^{-1})$

(iii) $inv((i,j)) = 2(j-1-i)+1$

(iv) $\sigma, \tau \in S_n$, $\underbrace{(-1)^{inv(\sigma)+inv(\tau)} = (-1)^{inv(\sigma \circ \tau)}}_{\text{stessa parità}}$



2 inversioni si annullano

0 inversioni rimangono zero

1 inversione rimane tale

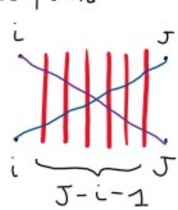


Fig. 2: visuale

2 inversioni si annullano — 0 inversioni rimangono zero — 1 inversione rimane tale

Fig. 1: dimostrazione della proprietà (iv).

$J - i - 1$

Fig. 2: visuale della proprietà (iii).

OSS. 2 σ si può scrivere come prodotto di trasposizioni.

$$(a_1, a_2, \dots, a_k)(b_1, \dots, b_i) =$$
$$= (a_1, a_2) \circ (a_2, a_3) \circ \dots \circ (a_{k-1}, a_k) \circ$$
$$\circ (b_1, b_2) \circ \dots \circ (b_{i-1}, b_i)$$

Prop. Sia $\sigma \in S_n$, $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_r =$
$= \tau_1' \circ \tau_2' \circ \dots \circ \tau_s'$. Allora $r \equiv s \ (2)$.

Dimostrazione

$$(-1)^{inv(\sigma)} = (-1)^{inv(\tau_1 \circ \dots \circ \tau_r)} =$$
$$= (-1)^{inv(\tau_1) + inv(\tau_2) + \dots + inv(\tau_r)} =$$
$$\underbrace{=}_{inv(\tau_i) \equiv 1 \ (2)} (-1)^r \implies \underbrace{\begin{matrix} r \equiv inv(\sigma) \ (2) \\ \text{(idem)} \quad s \equiv inv(\sigma) \ (2) \end{matrix}}$$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$\sum inv(\tau_i) = r \ (2)$ $\qquad\qquad$ $r \equiv s \ (2)$ $\qquad$ $\boxtimes$

Corollario Se $\sigma \in S_n$ è dato da cicli disgiunti come $\sigma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \cdots \gamma_r$ con γ_i di lunghezza k_i allora $(-1)^{inv(\sigma)} = (-1)^{\sum_{i=0}^{r} (k_i - 1)}$

Def. Il segno della permutazione $\sigma \in S_n$ è
$$sgn(\sigma) := (-1)^{inv(\sigma)} = \begin{cases} 1 & \text{se } \sigma \text{ pari} \\ -1 & \text{se } \sigma \text{ dispari} \end{cases}$$

OSS. $C_2 = \{1, -1\}$ è un gruppo con il prodotto, in particolare $C_2 = (-1)$.

OSS. $C_2 = \{1, -1\}$ è un gruppo con il prodotto, in particolare $C_2 = \langle -1 \rangle$.

OSS. 2 $sgn: S_n \to C_2$ è un omomorfismo:

$$sgn(\sigma \circ \tau) = sgn(\sigma) \cdot sgn(\tau)$$

$$\Updownarrow$$

$$(-1)^{inv(\sigma \circ \tau)} = (-1)^{inv(\sigma)} \cdot (-1)^{inv(\tau)}$$ ✓

$Ker\ sgn := A_n$ } permutazioni pari

quindi: A_n è un SOTTOGRUPPO di S_n (inoltre card $A_n = \frac{n!}{2}$)

$$sgn(\sigma) = 1$$

$$\Updownarrow$$

σ è PARI

Ordine in S_n

$$\sigma \in S_n. \quad \sigma = \underbrace{(a_1, \overset{A}{\dots}, a_{k_1})}_{o(A) = k_1} \underbrace{(b_1, \overset{B}{\dots}, b_{k_2})}_{O(B) = k_2}$$

$$\boxed{o(\sigma) = mcm(k_1, k_2)}$$

Coniugio

$$\tau, \sigma \in S_n, \quad \sigma = (a_1, \dots, a_{k_1})(b_1, \dots, b_{k_2})$$

$$\tau \sigma \tau^{-1} = (\tau(a_1), \tau(a_2), \dots)(\tau(b_1), \dots)$$

Dimostrazione

WLOG si considera l'i-esimo elemento di un ciclo λ generico di lunghezza k:

$$\tau \sigma \tau^{-1}(\tau(\lambda_i)) = \tau\sigma(\lambda_i) =$$

$$= \begin{cases} \tau(\lambda_{i+1}) & \text{se } i < k \\ \tau(\lambda_1) & \text{se } i = k \end{cases},$$

esattamente come $(\tau(\lambda_1), \tau(\lambda_2), \dots, \tau(\lambda_k))$.

Numero di coniugi

Dal momento che, come visto prima, la struttura di un coniugio in S_n dipende solo da quella dell'elemento coniugato, è facilmente computabile il numero possibile di coniugi di un elemento σ.

Si definisce ciclo un elemento di S_n della forma $(a_1, a_2, \dots)$. Ogni elemento di S_n è prodotto di cicli: infatti $(a_1, a_2, \cdots, a_{k_1})(b_1, b_2, \cdots, b_{k_2})\cdots$ è equivalente a $(a_1, \dots, a_{k_1}) \circ (b_1, \dots, b_{k_2}) \circ \cdots$.

Sia $\sigma \in S_n$. Si definisce $\lambda_i = \operatorname{card}\{\text{ciclo } \mathfrak{J} \in \sigma \mid |\mathfrak{J}| = i\}$, ossia come il numero di cicli di σ con i elementi.

Allora esistono esattamente N coniugi, dove:

$$N = \frac{n!}{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \cdots n^{\alpha_n} \alpha_1! \cdots \alpha_n!}$$

La formula risulta chiara se viene impiegata la notazione *one-liner*, dove $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \downarrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ lo si scrive $\sigma = a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots a_n$. In questo modo risulta normale pensare che le permutazioni di σ siano $n!$ con alcune modo risulta normale pensare che le permutazioni di σ siano $n!$ con alcune rimozioni:

(i) k^{α_k} I cicli $(1, 2, \dots, k)$, $(k, 1, 2, \dots, k-1)$, ... (i.e. con shift/traslazione di posizione) sono tutti equivalenti: pertanto ad ogni k-ciclo è necessario togliere k combinazioni; essendovi α_k k-cicli, si tolgono k^{α_k} permutazioni.

(ii) $\alpha_k!$ Ogni k-ciclo può commutare con un altro k-ciclo, pertanto si devono eliminare le permutazioni dei k-cicli, che $\alpha_k!$.