

Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

22 marzo 2023

Decomposizione di Jordan, forma canonica di Jordan reale e prodotto scalare

Nota. Nel corso del documento, qualora non specificato, per f si intenderà un qualsiasi endomorfismo di V , dove V è uno spazio vettoriale di dimensione $n \in \mathbb{N}$. Inoltre per \mathbb{K} si intenderà, per semplicità, un campo algebricamente chiuso; altrimenti è sufficiente considerare un campo \mathbb{K} in cui i vari polinomi caratteristici esaminati si scompongono in fattori lineari.

Sia J la forma canonica di Jordan relativa a $f \in \text{End}(V)$ in una base \mathcal{B} . Allora è possibile decomporre tale matrice in una somma di due matrici D e N tali che:

- D è diagonale e in particolare contiene tutti gli autovalori di J ;
- N è nilpotente ed è pari alla matrice ottenuta ignorando la diagonale di J ;
- $DN = ND$, dacché le due matrici sono a blocchi diagonali.

Pertanto è possibile considerare gli endomorfismi $\delta = M_{\mathcal{B}}^{-1}(D)$ (diagonalizzabile) e $\nu = M_{\mathcal{B}}^{-1}(N)$ (nilpotente). Si osserva allora che questi endomorfismi sono tali che $f = \delta + \nu$ (**decomposizione di Jordan** di f).

Teorema. La decomposizione di Jordan di f è unica.

Dimostrazione. Per dimostrare che la decomposizione di Jordan è unica è sufficiente mostrare che, dati δ, δ' diagonalizzabili e ν, ν' nilpotenti tali che $f = \delta + \nu = \delta' + \nu'$, deve valere necessariamente che $\delta = \delta'$ e che $\nu = \nu'$. In particolare è sufficiente dimostrare che $\delta|_{\widetilde{V}_\lambda} = \delta'|_{\widetilde{V}_\lambda}$ per ogni autovalore λ di

f , dal momento che $V = \widetilde{V}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \widetilde{V}_{\lambda_k}$, dove k è il numero di autovalori distinti di f , e così le matrici associate dei due endomorfismi sarebbero uguali in una stessa base, da cui si concluderebbe che $\delta = \delta'$, e quindi che $\nu = \nu'$.

Si osserva innanzitutto che δ (e così tutti gli altri tre endomorfismi) commuta con f : $\delta \circ f = \delta \circ (\delta + \nu) \stackrel{\delta \circ \nu = \nu \circ \delta}{=} (\delta + \nu) \circ \delta = f \circ \delta$. Da quest'ultimo

risultato consegue che \widetilde{V}_λ è δ -invariante, dacché se f commuta con δ , anche $(f - \lambda \text{Id})^n$ commuta con δ . Sia infatti $\underline{v} \in \widetilde{V}_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})^n$, allora $(f - \lambda \text{Id})^n(\delta(\underline{v})) = \delta((f - \lambda \text{Id})^n(\underline{v})) = \delta(\underline{0}) = \underline{0} \implies \delta(\widetilde{V}_\lambda) \subseteq \widetilde{V}_\lambda$.

Si considerano allora gli endomorfismi $\delta|_{\widetilde{V}_\lambda}$, $\delta'|_{\widetilde{V}_\lambda}$, $\nu|_{\widetilde{V}_\lambda}$, $\nu'|_{\widetilde{V}_\lambda} \in \text{End}(\widetilde{V}_\lambda)$. Dal momento che $\delta|_{\widetilde{V}_\lambda}$ e $\nu|_{\widetilde{V}_\lambda}$ commutano, esiste una base \mathcal{B}' di \widetilde{V}_λ tale per cui i due endomorfismi sono triangolarizzabili simultaneamente. Inoltre, dal momento che $\delta|_{\widetilde{V}_\lambda}$ è una restrizione su δ , che è diagonalizzabile per ipotesi, anche quest'ultimo endomorfismo è diagonalizzabile; analogamente $\nu|_{\widetilde{V}_\lambda}$ è ancora nilpotente.

Si osserva dunque che $M_{\mathcal{B}'}(f|_{\widetilde{V}_\lambda}) = M_{\mathcal{B}'}(\delta|_{\widetilde{V}_\lambda}) + M_{\mathcal{B}'}(\nu|_{\widetilde{V}_\lambda})$: la diagonale di $M_{\mathcal{B}'}(\nu|_{\widetilde{V}_\lambda})$ è nulla, e $M_{\mathcal{B}'}(f|_{\widetilde{V}_\lambda})$, poiché somma di due matrici triangolari superiori, è una matrice triangolare superiore. Allora la diagonale di $M_{\mathcal{B}'}(f|_{\widetilde{V}_\lambda})$ raccoglie l'unico autovalore λ di $f|_{\widetilde{V}_\lambda}$, che dunque è l'unico autovalore anche di $\delta|_{\widetilde{V}_\lambda}$. In particolare, poiché $\delta|_{\widetilde{V}_\lambda}$ è diagonalizzabile, vale che $\delta|_{\widetilde{V}_\lambda} = \lambda \text{Id}$. Analogamente $\delta'|_{\widetilde{V}_\lambda} = \lambda \text{Id}$, e quindi $\delta|_{\widetilde{V}_\lambda} = \delta'|_{\widetilde{V}_\lambda}$, da cui anche $\nu|_{\widetilde{V}_\lambda} = \nu'|_{\widetilde{V}_\lambda}$. Si conclude dunque che le coppie di endomorfismi sono uguali su ogni restrizione, e quindi che $\delta = \delta'$ e $\nu = \nu'$. \square

Sia adesso $V = \mathbb{R}^n$. Si consideri allora la forma canonica di Jordan di f su \mathbb{C} (ossia estendendo, qualora necessario, il campo a \mathbb{C}) e sia \mathcal{B} una base di Jordan per f . Sia α un autovalore di f in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Allora, dacché $p_f \in \mathbb{R}[\lambda]$, anche $\bar{\alpha}$ è un autovalore di f . In particolare, vi è un isomorfismo tra \widetilde{V}_α e $\widetilde{V}_{\bar{\alpha}}$ (rappresentato proprio dall'operazione di coniugio). Quindi i blocchi di Jordan relativi ad α e ad $\bar{\alpha}$ sono gli stessi, benché coniugati.

Sia ora \mathcal{B}' una base ordinata di Jordan per $f|_{\widetilde{V}_\alpha}$, allora $\overline{\mathcal{B}'}$ è anch'essa una base ordinata di Jordan per $f|_{\widetilde{V}_{\bar{\alpha}}}$. Si consideri dunque $W = \widetilde{V}_\alpha \oplus \widetilde{V}_{\bar{\alpha}}$ e la restrizione $\varphi = f|_W$. Si osserva che la forma canonica di φ si ottiene estraendo i singoli blocchi relativi ad α e $\bar{\alpha}$ dalla forma canonica di f . Se

$\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_k\}$, si considera $\mathcal{B}'' = \{\Re(v_1), \Im(v_1), \dots, \Re(v_k), \Im(v_k)\}$, ossia i vettori tali che $\underline{v}_i = \Re(v_i) + i\Im(v_i)$. Questi vettori soddisfano due particolari proprietà:

- $\Re(\underline{v}_i) = \frac{v_i + \overline{v}_i}{2}$,
- $\Im(\underline{v}_i) = \frac{v_i - \overline{v}_i}{2i} \underbrace{=}_{\frac{1}{i} = -i} -\frac{v_i - \overline{v}_i}{2}i$.

In particolare \mathcal{B}'' è un base di W , dal momento che gli elementi di \mathcal{B}'' generano W e sono tanti quanto la dimensione di W , ossia $2k$. Si ponga $\alpha = a + bi$. Se \underline{v}_i è autovettore si conclude che:¹

- $f(\Re(\underline{v}_i)) = \frac{1}{2}(f(v_i) + f(\overline{v}_i)) = \frac{1}{2}(\alpha v_i + \overline{\alpha v_i}) = \frac{1}{2}(a v_i + b i v_i + a \overline{v}_i - b i \overline{v}_i) = a \frac{v_i + \overline{v}_i}{2} + b \frac{v_i - \overline{v}_i}{2}i = a\Re(\underline{v}_i) - b\Im(\underline{v}_i)$,
- $f(\Im(\underline{v}_i)) = \frac{1}{2i}(f(v_i) - f(\overline{v}_i)) = \frac{1}{2i}(\alpha v_i - \overline{\alpha v_i}) = \frac{1}{2i}(a v_i + b i v_i - a \overline{v}_i + b i \overline{v}_i) = b \frac{v_i + \overline{v}_i}{2} + a \frac{v_i - \overline{v}_i}{2i} = b\Re(\underline{v}_i) + a\Im(\underline{v}_i)$.

Altrimenti, se non lo è:

- $f(\Re(\underline{v}_i)) = \frac{1}{2}(f(v_i) + f(\overline{v}_i)) = \frac{1}{2}(\alpha v_i + v_{i-1} + \overline{\alpha v_i} + \overline{v_{i-1}}) = \frac{1}{2}(a v_i + b i v_i + a \overline{v}_i - b i \overline{v}_i) + \Re(\underline{v}_{i-1}) = a \frac{v_i + \overline{v}_i}{2} + b \frac{v_i - \overline{v}_i}{2}i + \Re(\underline{v}_{i-1}) = a\Re(\underline{v}_i) - b\Im(\underline{v}_i) + \Re(\underline{v}_{i-1})$,
- $f(\Im(\underline{v}_i)) = \frac{1}{2i}(f(v_i) - f(\overline{v}_i)) = \frac{1}{2i}(\alpha v_i + v_{i-1} - \overline{\alpha v_i} - \overline{v_{i-1}}) = \frac{1}{2i}(a v_i + b i v_i - a \overline{v}_i + b i \overline{v}_i) + \Im(\underline{v}_{i-1}) = b \frac{v_i + \overline{v}_i}{2} + a \frac{v_i - \overline{v}_i}{2i} + \Im(\underline{v}_{i-1}) = b\Re(\underline{v}_i) + a\Im(\underline{v}_i) + \Im(\underline{v}_{i-1})$.

Quindi la matrice associata nella base \mathcal{B}'' è la stessa di f relativa ad α dove si amplifica la matrice sostituendo ad α la matrice² $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ e ad 1 la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¹Si è in seguito utilizzato più volte l'identità $f(\overline{v_i}) = \overline{f(v_i)}$.

²Si verifica facilmente che lo spazio delle matrici $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ è isomorfo a \mathbb{C} secondo la mappa $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a + bi$.

Esempio. Si consideri la matrice $M = \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$. Si

osserva che M è composta da due blocchi che sono uno il blocco coniugato

dell'altro. Quindi M è simile alla matrice reale $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Definizione. Un **prodotto scalare** su V è una forma bilineare simmetrica φ con argomenti in V .

Esempio. Sia $\varphi : M(n, \mathbb{K})^2 \rightarrow \mathbb{K}$ tale che $\varphi(A, B) = \text{tr}(AB)$.

- ▶ $\varphi(A + A', B) = \text{tr}((A + A')B) = \text{tr}(AB + A'B) = \text{tr}(AB) + \text{tr}(A'B) = \varphi(A, B) + \varphi(A', B)$ (linearità nel primo argomento),
- ▶ $\varphi(\alpha A, B) = \text{tr}(\alpha AB) = \alpha \text{tr}(AB) = \alpha \varphi(A, B)$ (omogeneità nel secondo argomento),
- ▶ $\varphi(A, B) = \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) = \varphi(B, A)$ (simmetria),
- ▶ poiché φ è simmetrica, φ è lineare e omogenea anche nel secondo argomento, e quindi è una forma bilineare simmetrica, ossia un prodotto scalare su $M(n, \mathbb{K})$.

Definizione. Si definisce prodotto scalare *canonico* di \mathbb{K}^n la forma bilineare simmetrica φ con argomenti in \mathbb{K}^n tale che:

$$\varphi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Osservazione. Si può facilmente osservare che il prodotto scalare canonico di \mathbb{K}^n è effettivamente un prodotto scalare.

- ▶ $\varphi((x_1, \dots, x_n) + (x'_1, \dots, x'_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n (x_i + x'_i) y_i = \sum_{i=1}^n [x_i y_i + x'_i y_i] = \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n x'_i y_i = \varphi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) + \varphi((x'_1, \dots, x'_n), (y_1, \dots, y_n))$ (linearità nel primo argomento),
- ▶ $\varphi(\alpha(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n \alpha x_i y_i = \alpha \sum_{i=1}^n x_i y_i = \alpha \varphi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))$ (omogeneità nel primo argomento),
- ▶ $\varphi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \varphi((y_1, \dots, y_n), (x_1, \dots, x_n))$ (simmetria),

► poiché φ è simmetrica, φ è lineare e omogenea anche nel secondo argomento, e quindi è una forma bilineare simmetrica, ossia un prodotto scalare su \mathbb{K}^n .

Esempio. Altri esempi di prodotto scalare sono i seguenti:

- $\varphi(A, B) = \text{tr}(A^\top B)$ per $M(n, \mathbb{K})$,
- $\varphi(p(x), q(x)) = p(a)q(a)$ per $\mathbb{K}[x]$, con $a \in \mathbb{K}$,
- $\varphi(p(x), q(x)) = \sum_{i=1}^n p(x_i)q(x_i)$ per $\mathbb{K}[x]$, con x_1, \dots, x_n distinti,
- $\varphi(p(x), q(x)) = \int_a^b p(x)q(x)dx$ per lo spazio delle funzioni integrabili su \mathbb{R} , con a, b in \mathbb{R} ,
- $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^\top A \underline{y}$ per \mathbb{K}^n , con $A \in M(n, \mathbb{K})$ simmetrica.

Definizione. Sia³ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Allora un prodotto scalare φ è **definito positivo** se $\underline{v} \neq \underline{0} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0$.

Esempio. Il prodotto scalare canonico di \mathbb{R}^n è definito positivo: infatti $\varphi((x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \iff x_i = 0, \forall 1 \leq i \leq n \iff (x_1, \dots, x_n) = \underline{0}$.

Al contrario, il prodotto scalare $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ non è definito positivo: $\varphi((x, y), (x, y)) = 0, \forall (x, y) \mid x^2 = y^2$, ossia se $y = x$ o $y = -x$.

Definizione. Dato un prodotto scalare φ di V , ad ogni vettore $\underline{v} \in V$ si associa una **forma quadratica** $q : V \rightarrow \mathbb{K}$ tale che $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v})$.

Osservazione. Si osserva che q non è lineare in generale: infatti $q(\underline{v} + \underline{w}) \neq q(\underline{v}) + q(\underline{w})$ in \mathbb{R}^n .

Definizione. Un vettore $\underline{v} \in V$ si dice **isotropo** rispetto al prodotto scalare φ se $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$.

Esempio. Rispetto al prodotto scalare $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$, i vettori isotropi (x, y, z) sono quelli tali che $x^2 + y^2 = z^2$, ossia i vettori stanti sul cono di eq. $x^2 + y^2 = z^2$.

Osservazione. Come già osservato in generale per le app. multilineari, il prodotto scalare è univocamente determinato dai valori che assume nelle coppie $\underline{v}_i, \underline{v}_j$ estraibili da una base \mathcal{B} . Infatti, se $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$, $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{v}_i$ e $\underline{w} = \sum_{i=1}^k \beta_i \underline{v}_i$, allora:

³In realtà, la definizione è facilmente estendibile a qualsiasi campo, purché esso sia ordinato.

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq k} \alpha_i \beta_j \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j).$$

Definizione. Sia φ un prodotto scalare di V e sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base ordinata di V . Allora si denota con **matrice associata** a φ la matrice:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j))_{i,j=1-n} \in M(n, \mathbb{K}).$$

Osservazione. Si possono fare alcune osservazioni riguardo $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

- ▶ $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è simmetrica, infatti $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \varphi(\underline{v}_j, \underline{v}_i)$ per definizione di prodotto scalare,
- ▶ $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$.

Teorema. (di cambiamento di base per matrici di prodotti scalari) Siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ due basi ordinate di V . Allora, se φ è un prodotto scalare di V e $P = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_V)$, vale la seguente identità:

$$\underbrace{M_{\mathcal{B}'}(\varphi)}_{A'} = P^{\top} \underbrace{M_{\mathcal{B}}(\varphi)}_A P.$$

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ e $\mathcal{B}' = (\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n)$. Allora $A'_{ij} = \varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_j) = [\underline{w}_i]_{\mathcal{B}'}^{\top} A [\underline{w}_j]_{\mathcal{B}'} = (P^i)^{\top} A P^j = P_i^{\top} (A P)^j = (P^{\top} A P)_{ij}$, da cui la tesi. \square

Definizione. Si definisce **congruenza** la relazione di equivalenza \cong definita nel seguente modo su $A, B \in M(n, \mathbb{K})$:

$$A \cong B \iff \exists P \in GL(n, \mathbb{K}) \mid A = P^{\top} B P.$$

Osservazione. Si può facilmente osservare che la congruenza è in effetti una relazione di equivalenza.

- ▶ $A = I^{\top} A I \implies A \cong A$ (riflessione),
- ▶ $A \cong B \implies A = P^{\top} B P \implies B = (P^{\top})^{-1} A P^{-1} = (P^{-1})^{\top} A P^{-1} \implies B \cong A$ (simmetria),
- ▶ $A \cong B \implies A = P^{\top} B P, B \cong C \implies B = Q^{\top} C Q$, quindi $A = P^{\top} Q^{\top} C Q P = (QP)^{\top} C (QP) \implies A \cong C$ (transitività).

Osservazione. Si osservano alcune proprietà della congruenza.

- Per il teorema di cambiamento di base del prodotto scalare, due matrici associate a uno stesso prodotto scalare sono sempre congruenti (esattamente come due matrici associate a uno stesso endomorfismo sono sempre simili).
- Se A e B sono congruenti, $A = P^\top B P \implies \text{rg}(A) = \text{rg}(P^\top B P) = \text{rg}(B P) = \text{rg}(B)$, dal momento che P e P^\top sono invertibili; quindi il rango è un invariante per congruenza. Allora è ben definito il rango $\text{rg}(\varphi)$ di un prodotto scalare come il rango di una sua qualsiasi matrice associata.
- Se A e B sono congruenti, $A = P^\top B P \implies \det(A) = \det(P^\top B P) = \det(P^\top) \det(B) \det(P) = \det(P)^2 \det(B)$. Quindi, per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il segno del determinante è invariante per congruenza.

Definizione. Si dice **radicale** di un prodotto scalare φ lo spazio:

$$V^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0, \forall \underline{w} \in V\}$$

Osservazione. Il radicale di \mathbb{R}^n con il prodotto scalare canonico ha dimensione nulla, dal momento che $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0$.

Definizione. Un prodotto scalare si dice **degenere** se il radicale dello spazio su tale prodotto scalare ha dimensione non nulla.

Osservazione. Si definisce l'applicazione lineare $\alpha_\varphi : V \rightarrow V^*$ in modo tale che $\alpha_\varphi(\underline{v}) = p$, dove $p(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$.

Allora V^\perp altro non è che $\text{Ker } \alpha_\varphi$. Se V ha dimensione finita, $\dim V = \dim V^*$, e si può allora concludere che $\dim V^\perp > 0 \iff \text{Ker } \alpha_\varphi \neq \{0\} \iff \alpha_\varphi$ non è invertibile (infatti lo spazio di partenza e di arrivo di α_φ hanno la stessa dimensione). In particolare, α_φ non è invertibile se e solo se $\det(\alpha_\varphi) = 0$.

Sia $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ una base ordinata di V . Si consideri allora la base ordinata del duale costruita su \mathcal{B} , ossia $\mathcal{B}^* = (\underline{v}_1^*, \dots, \underline{v}_n^*)$. Allora

$$M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\alpha_\varphi)^i = [\alpha_\varphi(\underline{v}_i)]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_1) \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_n) \end{pmatrix} \underset{\varphi \text{ è simmetrica}}{=} \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i) \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v}_n, \underline{v}_i) \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^i.$$

Quindi $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\alpha_\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Si conclude allora che φ è degenere se e solo se $\det(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = 0$ e che $V^\perp \cong \text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ con l'isomorfismo è il passaggio alle coordinate.