

# Il gruppo diedrale e i suoi sottogruppi

di Gabriel Antonio Videtta

In questo documento si definisce il gruppo diedrale e si illustrano le sue proprietà principali, a partire da come sono costruiti i suoi sottogruppi.

Sia  $n \geq 3$ . Si definisce **gruppo diedrale**, denotato<sup>1</sup> come  $D_n$ , il gruppo delle isometrie del piano  $\mathbb{R}^2$  che mappano i vertici di un poligono regolare centrato nell'origine con  $n$  lati in sé stessi.

Si verifica facilmente che  $D_n$  è un gruppo:

- Ammette un'identità, che coincide con l'identità delle isometrie,
- La composizione di due isometrie che mappano i vertici del poligono in sé stessi è ancora un'isometria che lascia fissi i vertici del poligono,
- Ogni isometria per cui i vertici del poligono rimangono fissi ammette un'inversa con la stessa proprietà<sup>23</sup>.

In particolare, se  $\sigma \in D_n$ ,  $\sigma$  permuta i vertici del poligono (pertanto si può visualizzare  $D_n$  come un sottogruppo naturale di  $S_n$ ). Denotando con  $r$  la rotazione primitiva del gruppo (ossia una rotazione di  $\frac{2\pi}{n}$  gradi in senso antiorario) e con  $s$  la simmetria rispetto all'asse  $y$ , si osserva che ogni elemento della forma  $sr^k$  con  $k \in \mathbb{Z}$  è ancora una simmetria, benché non per forza rispetto all'asse  $y$ <sup>4</sup>. In particolare, per  $n$  pari, le riflessioni di  $D_n$  sono esattamente le riflessioni rispetto alle rette passanti per i vertici o per i punti medi del poligono.

Dal momento che  $\sigma \in D_n$  è in particolare una isometria, e quindi un'applicazione lineare,  $\sigma$  è completamente determinata da  $\sigma(V_1)$  e  $\sigma(V_2)$ , dove  $V_i$  sono i vertici del poligono numerati in senso antiorario. In particolare, se  $\sigma(V_1) = V_k$ , allora  $\sigma(V_2)$ , affinché venga preservata la distanza, può valere<sup>5</sup> o  $V_{k-1}$  o  $V_{k+1}$ . Pertanto vi sono al più  $2n$  scelte

---

<sup>1</sup>Alcuni testi denotano il gruppo diedrale come  $D_{2n}$ , dal momento che vale  $|D_n| = 2n$ .

<sup>2</sup>Si ricorda che ogni isometria è invertibile a prescindere.

<sup>3</sup>Dal momento che  $D_n$  ha cardinalità  $2n$ , come mostrato dopo, questa condizione è automaticamente verificata come conseguenza della finitezza di  $D_n$ .

<sup>4</sup>La matrice associata di  $s$  nella base canonica è  $-1E_{11} + E_{22}$ , e quindi deve valere  $\det(s) = -1$ . Al contrario  $r \in \text{SO}(2)$ , e quindi  $\det(r) = 1$ . Si conclude pertanto che  $\det(sr^k) = \det(s)\det(r)^k = -1$ , e dunque che  $sr^k$  deve obbligatoriamente appartenere alla classe laterale  $s\text{SO}(2)$  delle riflessioni.

<sup>5</sup>Per semplicità si pone  $V_0 := V_n$  e  $V_{n+1} := V_1$ .

possibili di  $\sigma(V_1)$  e  $\sigma(V_2)$  (e quindi  $|D_n| \leq 2n$ ). D'altra parte si osserva che tutti gli elementi  $1, r, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}$  sono distinti:

- Gli  $r^k$  con  $0 \leq k \leq \text{ord}(r) - 1$  sono tutti distinti e  $\text{ord}(r)$  vale esattamente<sup>6</sup>  $n$ ,
- Gli  $sr^k$  con  $0 \leq k \leq n - 1$  sono tutti distinti, altrimenti la precedente osservazione sarebbe contraddetta,
- Nessun  $r^i$  coincide con un  $sr^j$ , dal momento che i loro determinanti sono diversi ( $\det(r^i) = 1$ , mentre  $\det(sr^j) = -1$ ). In particolare  $r^i \in \text{SO}(2)$ , mentre  $sr^j \in s\text{SO}(2)$ .

Pertanto  $|D_n| \geq 2n$ , e quindi  $|D_n| = 2n$ . Si conclude inoltre che  $D_n$  è generato da  $r$  e da  $s$ , e quindi che  $D_n = \langle r, s \rangle$ . Esistono dunque due sottogruppi naturali di  $D_n$ :

$$\mathcal{R} := \langle r \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \langle s \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

**Proposizione.** Vale l'identità  $sr s^{-1} = r^{-1}$ .

*Dimostrazione.* Si sviluppa  $sr s^{-1}$  in termini matriciali, considerando  $s = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  e  $r = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & -\sin(\frac{2\pi}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix}$ :

$$sr s^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & \sin(\frac{2\pi}{n}) \\ -\sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix},$$

ottenendo la matrice associata a  $r^{-1}$  nella base canonica. □

In generale vale dunque che  $sr^k s^{-1} = r^{-k}$ . Si deduce allora la presentazione del gruppo  $D_n$ :

$$D_n = \langle r, s \mid r^n = 1, s^2 = 1, sr s^{-1} = r^{-1} \rangle.$$

Si descrivono adesso tutti i sottogruppi di  $D_n$ . Innanzitutto, in  $\mathcal{R}$  per ogni  $d \mid n$  esiste un unico sottogruppo di ordine  $d$  dal momento che  $\mathcal{R}$  è ciclico. Pertanto ogni tale sottogruppo assume la forma  $\langle r^{\frac{n}{d}} \rangle$ . Inoltre, dal momento che<sup>7</sup>  $[D_n : \mathcal{R}] = 2$ ,  $\mathcal{R}$  è un sottogruppo normale di  $D_n$ . Allora, poiché  $\mathcal{R}$  è normale in  $D_n$  e ogni sottogruppo  $H \leq \mathcal{R}$  è caratteristico<sup>8</sup> in  $D_n$ , ogni sottogruppo di  $\mathcal{R}$  è normale anche in  $D_n$ .

Sia ora  $H$  un sottogruppo di  $D_n$  con  $H \not\subseteq \mathcal{R}$ . Si consideri la proiezione al quoziente mediante  $\mathcal{R}$ , ossia  $\pi_{\mathcal{R}} : D_n \rightarrow D_n/\mathcal{R}$ . Chiaramente deve valere che  $\pi_{\mathcal{R}}(H) = D_n/\mathcal{R}$ : l'unica altra possibilità è che  $\pi_{\mathcal{R}}(H)$  sia  $\{\mathcal{R}\}$ , e quindi che  $H \subseteq \text{Ker } \pi_{\mathcal{R}} = \mathcal{R}$ ,  $\sharp$ .

---

<sup>6</sup>Infatti  $r$  è rappresentato in  $\text{SO}(2)$  dalla matrice  $\begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{n}) & -\sin(\frac{2\pi}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi}{n}) & \cos(\frac{2\pi}{n}) \end{pmatrix}$ , che ha ordine esattamente  $n$ .

<sup>7</sup>Infatti ogni elemento di  $D_n$ , come visto prima, è della forma  $r^k$  o  $sr^k$ .

<sup>8</sup>Per ogni ordine di  $\mathcal{R}$  esiste un unico sottogruppo  $H \leq \mathcal{R}$ , e quindi tale sottogruppo deve essere caratteristico.

Si consideri adesso la restrizione di  $\pi_{\mathcal{R}}$  ad  $H$ ,  $\pi_{\mathcal{R}}|_H : H \rightarrow D_n/\mathcal{R}$ . Vale in particolare che  $\text{Ker } \pi_{\mathcal{R}}|_H = H \cap \text{Ker } \pi_{\mathcal{R}} = H \cap \mathcal{R}$  e che  $\text{Im } \pi_{\mathcal{R}}|_H = D_n/\mathcal{R}$  (da prima vale infatti che  $\pi_{\mathcal{R}}(H) = D_n/\mathcal{R}$ ). Allora, per il Primo teorema di isomorfismo, vale che:

$$\frac{H}{H \cap \mathcal{R}} \cong D_n/\mathcal{R},$$

da cui si deduce che  $|H| = 2|H \cap \mathcal{R}|$ . In particolare  $H \cap \mathcal{R}$  è un sottogruppo di  $\mathcal{R}$ , e quindi esiste  $d \mid n$  tale per cui  $H \cap \mathcal{R} = \langle r^d \rangle$ , con  $|H \cap \mathcal{R}| = \frac{n}{d}$ .

Sia ora  $sr^k$  una simmetria di  $H$ . Innanzitutto si osserva che  $\langle r^d \rangle$  è normale in  $D_n$  e quindi  $\langle r^d \rangle \langle sr^k \rangle$  è effettivamente un sottogruppo di  $D_n$ . Dal momento che<sup>9</sup>  $\langle r^d \rangle \cap \langle sr^k \rangle = \{e\}$ , allora  $|\langle r^d \rangle \langle sr^k \rangle| = |\langle r^d \rangle| |\langle sr^k \rangle| = \frac{2n}{d}$ . Anche  $|H| = \frac{2n}{d}$  e quindi, per questioni di cardinalità,  $H = \langle r^d \rangle \langle sr^k \rangle = \langle r^d, sr^k \rangle$ .

In conclusione, ogni sottogruppo di  $D_n$  è della forma  $\langle r^d \rangle$  o della forma  $\langle r^d, sr^k \rangle$ . Si mostra adesso che per  $0 \leq k < d < n$  e  $d \mid n$  la classificazione è unica e completa. Chiaramente è completa, dal momento che  $d$  si può sempre ridurre in modulo  $n$  e che per  $k > d$  si può moltiplicare  $sr^k$  per riottenere una riflessione con esponente minore di  $d$ .

Si verifica adesso che è vi è un solo modo di esprimere un sottogruppo in queste condizioni. Se  $H_1 := \langle r^{d_1}, sr^{k_1} \rangle = \langle r^{d_1}, sr^{k_1} \rangle =: H_2$ , allora in particolare  $H_1 \cap \mathcal{R} = \langle r^{d_1} \rangle = \langle r^{d_2} \rangle = H_2 \cap \mathcal{R}$ , da cui si deduce facilmente che  $d_1 = d_2$ . Sia ora  $sr^{k_1} r^{td_1} = sr^{k_2} r^{t'd_2}$  con  $t, t' \in \mathbb{Z}$ . Allora deve valere che:

$$r^{k_1+td_1} = r^{k_2+t'd_2} \iff k_1 + td_1 \equiv k_2 + t'd_2 \pmod{n},$$

e quindi, se  $d := d_1 = d_2$ , questo implica che:

$$k_1 \equiv k_2 \pmod{d} \implies k_1 = k_2 \iff 0 \leq k_1, k_2 < d.$$

Pertanto esistono esattamente<sup>10</sup>  $d(n) + \sigma(n)$  sottogruppi di  $D_n$ .

Si studiano adesso i sottogruppi normali di  $D_n$ . Come già visto, i sottogruppi di  $\mathcal{R}$  sono tutti normali in  $D_n$ . Si studiano dunque soltanto i gruppi della forma  $\langle r^d, sr^h \rangle$ . Si ricorda che il sottogruppo  $H = \langle r^d, sr^h \rangle$  è normale se e solo se  $N_G(H) = G$ , ossia se il suo normalizzatore è tutto  $G$ . In particolare questo è vero se i generatori di  $G$  appartengono a  $N_G(H) = G$  e quindi se  $rHr^{-1} = H$  e se  $sHs^{-1} = H$ . In particolare<sup>11</sup> si deve studiare quando valgono le seguenti identità:

$$\langle r^d, sr^h \rangle = \underbrace{\langle r^d, sr^{h-2} \rangle}_{rHr^{-1}}, \quad \langle r^d, sr^h \rangle = \underbrace{\langle r^{-d}, r^h s^{-1} \rangle}_{sHs^{-1}} = \langle r^d, sr^{-h} \rangle.$$

<sup>9</sup>Infatti l'unica rotazione che è anche una simmetria è l'identità.

<sup>10</sup>La scrittura  $d(n)$  indica il numero di divisori di  $n$ , mentre  $\sigma(n)$  indica la somma dei divisori di  $n$ .

Infatti per ogni divisore  $d$  di  $n$  si conta un sottogruppo ciclico  $\langle r^d \rangle$  e un sottogruppo della forma  $\langle r^d, sr^h \rangle$  con  $0 \leq h < d$  (e quindi  $d$  sottogruppi di questo tipo).

<sup>11</sup>Si è utilizzata la relazione  $g\langle g_1, \dots, g_i \rangle g^{-1} = \langle gg_1g^{-1}, \dots, gg_ig^{-1} \rangle$ .

La prima identità è vera se e solo se  $h \equiv h - 2 \pmod{d}$ , e quindi se e solo se  $d \mid 2$ . Pertanto  $d$  può valere solo 1 o 2: se  $d = 1$ ,  $H$  è esattamente  $\langle r, s \rangle = D_n$ ; se invece  $d = 2$ ,  $H$  può essere soltanto  $\langle r^2, s \rangle$  o  $\langle r^2, sr \rangle$ . Ciononostante, nel caso  $d = 2$ , dal momento che  $d \mid n$ ,  $n$  deve essere pari (e quindi se  $n$  è dispari,  $D_n$  non ammette sottogruppi normali non banali, ed è in particolare semplice).

Si consideri dunque  $n$  pari. È sufficiente controllare che per  $d = 2$  valga anche la seconda identità, ossia che valga  $h \equiv -h \pmod{2}$ , sempre verificata. Si conclude dunque con la seguente classificazione:

- se  $n$  è dispari,  $D_n$  ammette come sottogruppi normali soltanto  $D_n$ ,  $\{e\}$  e i sottogruppi di  $\mathcal{R}$ ,
- se  $n$  è pari,  $D_n$  ammette come sottogruppi normali tutti quelli del caso dispari insieme a  $\langle r^2, s \rangle$  e  $\langle r^2, sr \rangle$ .