Successioni di numeri reali

Una successione in $\mathbb{R}$ e' una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dove si definisce la notazione $a_n := f(n)$. Si puo' pensare ad una successione come una sequenza ordinata di numeri reali non necessariamente distinti.

Data una successione S, si scrive $S = (x_0, x_1, \dots) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n)$. E' sufficiente che gli indici siano numerabili affinché una successione possa considerarsi tale.

Si definisce sottosuccessione di S una successione T che riprende parzialmente elementi di S, preservandone l'ordine, ossia $\underbrace{f_T}_{\mathbb{N}\to\mathbb{R}} = \underbrace{f_S}_{\mathbb{N}\to\mathbb{R}} \circ \underbrace{g}_{\mathbb{N}\to\mathbb{N}}$, dove g e' strettamente crescente.

Def. (limite di una successione) Dato $L \in \mathbb{R}$, si dice $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ se $\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \mid |a_n - L| < \varepsilon \ \forall\, n \geq n_0$. Si scrive $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ se $\forall\, M \in \mathbb{R} \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \mid a_n \geq M \ \forall\, n \geq n_0$.

Def. Dato $x \in \mathbb{R}$, un intorno di x e' un intervallo della forma $I = [x-r, x+r]$ con $r>0$.

Def. Un intorno di $+\infty$ e' un intervallo della forma $I = [M, +\infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$. Uno di $-\infty$ e' della forma $I = [-\infty, M]$.

oss. $\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}} \iff \forall$ intorno I di L $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall\, n \geq n_0,\ a_n \in I$.

oss. una successione potrebbe non ammettere limite.

oss. data $f: X \to \mathbb{R}$ con $\mathbb{N} \subset X \subset \mathbb{R}$, $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} L \Rightarrow f(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

es. non vale il viceversa: $\lim_{n\to+\infty} \sin(\pi n) = 0$, ma $\nexists \lim_{x\to+\infty} \sin(\pi x)$.

es. $(-1)^n$ non ammette limite per $n \to +\infty$.

Prop. Il limite di una successione, se esiste, e' unico.

Siano $L_1, L_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ diversi limiti della stessa successione. Siano I_1, I_2 due intorni disgiunti di L_1 e L_2. Allora siano $m_1, m_2 \in \mathbb{R} \mid \forall n \geq m_2, a_n \in I_1$ $\wedge \forall n \geq m_2, a_n \in I_2$. Per $n \geq \max\{m_1, m_2\}$, $a_n \in I_1 \wedge a_n \in I_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_n \in I_1 \cap I_2 = \emptyset$, ↯. Pertanto L_1 e L_2 devono essere uguali. $\square$

Prop. Se una successione tende a $L \in \overline{\mathbb{R}}$, anche ogni sua sottosuccessione tende a L.

Sia a_n una successione e $\lim_{n \to \infty} a_n = L \in \overline{\mathbb{R}}$. Sia I un intorno di L. Per definizione di L, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \mid a_n \in I \ \forall n \geq n_0$. In particolare esisterà un $k_0 \in \mathbb{N} \mid b_k \in I \ \forall k \geq k_0$, dove b_n e' una sottosuccessione di a_n: infatti b_n e' costruita riprendendo parzialmente infiniti termini di a_n, preservandone l'ordine, e se tale k_0 non esistesse, b_n sarebbe composta o di un numero finito di termini o ripeterebbe infinite volte alcuni termini di a_n, in ogni caso formando un assurdo. $\square$

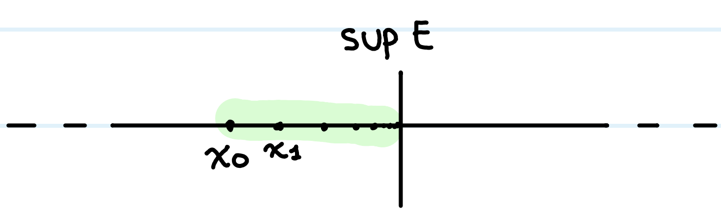
OSS. E' utile sfruttare la contronominale dell'ultima proposizione: sia $a_m := (-1)^m$.

$\lim_{m\to+\infty} a_{2m} = 1$, $\lim_{n\to+\infty} a_{2m+1} = -1 \implies \nexists \lim_{n\to+\infty} a_m$ (altrimenti i due limiti dovrebbero essere uguali).

Def. una successione $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ si dice MONOTONA se e' crescente o decrescente, non per forza strettamente.

Teorema se una succ. e' monotona, essa ammette limite.

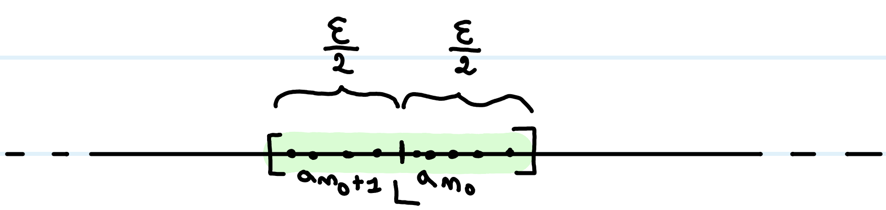
Sia $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una successione crescente. Sia $E = \{x_m : m\in\mathbb{N}\}$, ossia gli elementi di $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Sia $L = \sup E$ – esiste dacché $E \subset \mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}$ è completo. Sia I un intorno di L, con forma $[a, b]$, dove vale $a < L$. Poiché $a < L = \sup E$, a non e' un maggiorante di E, quindi $\exists\, \bar{m}\in\mathbb{N} \mid x_{\bar{m}} \geq a$. Poiché allora $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e' crescente, $\forall\, m \geq \bar{m}$, $x_m \geq a$. Inoltre $x_m \leq L$, dacché e' estremo superiore. Quindi $\forall\, m \geq \bar{m}$, $x_m \in I$, da cui la tesi. Analogamente se $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ e' decrescente. $\square$



Def. (x_m) si dice **successione di Cauchy** se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ m_\varepsilon \mid m, n \geq m_\varepsilon$ t.c. $|x_m - x_n| \leq \varepsilon$.

Prop. Se a_m ammette limite finito, a_m è una successione di Cauchy.

Sia I un intorno di L della forma $[L-\delta, L+\delta]$. Allora, per definizione di limite, $\exists \ m_0 \in \mathbb{N} \mid a_m \in I \ \forall \ m \geq m_0$. Pertanto $\forall \ m, n \geq m_0$, $|a_m - a_n| \leq |I| = 2\delta$. Si consideri dunque $\forall \ \varepsilon > 0$, $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ e $m_\varepsilon = m_0$, da cui la tesi. $\square$



Lemma 1 (teorema del confronto) Se $x_m \to L$ e $z_m \to L$ e $x_m \leq y_n \leq z_m \ \forall \ m \in \mathbb{N}^{(*)}$, allora $y_n \to L$.

Sia I un intorno di L e siano $m_1, m_2 \in \mathbb{N} \mid x_m \in I \ \forall \ m \geq m_1 \ \wedge$ $\wedge \ z_m \in I \ \forall \ m \geq m_2$. Sia $k = \max\{m_1, m_2\}$, allora $x_m, z_m \in I$ $\forall \ m \geq k$, e poiché $x_m \leq y_m \leq z_m \ \forall \ m \in \mathbb{N}$, $y_m \in I \ \forall \ m \geq k$. $\square$

(*) è sufficiente, in realtà, che sia vero in un intorno di $+\infty$.

Lemma 2 Sia $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ una successione decrescente di intervalli chiusi. Sia I_m della forma $[a_m, b_m]$. Allora valgono i seguenti risultati.

(i) $\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m = [a,b]$ con $a = \sup a_m = \lim_{m\to\infty} a_m$ e
$b = \inf b_m = \lim_{m\to\infty} b_n$,

(ii) $\underbrace{b_m - a_m}_{|I_m|} \xrightarrow{\infty} 0 \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} I_m = \{a\}$ e se $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ è tale che $x_m \in I_m \ \forall m \in \mathbb{N}$, allora $x_m \to a$ per $m \to \infty$.

Si consideri $I_m = [a_m, b_m]$. $a \geq a_m$, dacché ne e' l'estremo superiore; analogamente $b \leq b_m$. Quindi $[a,b] \subset I_m \ \forall m \geq 1$, da cui $[a,b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_m$. Sia ora $x \notin [a,b]$. Se $x \notin I_m \ \forall m \geq 1$, sicuramente non appartiene all'intersezione studiata. Altrimenti sia I_m l'intervallo a cui x appartiene: poiché $x \notin [a,b]$, vale $a_m \leq x < a$ o $b < x \leq b_m$. Si consideri il primo caso: poiché $x < a$, $x \notin \operatorname{Mag} a_m$, quindi $\exists t \in \mathbb{N} \mid x < a_t$, e dunque $x \in I_t \Rightarrow x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_m$. Analogamente se $b < x \leq b_m$. Pertanto vale (i).

Inoltre vale che $0 \leq b - a \leq b_m - a_m \ \forall m \in \mathbb{N}$. Allora, se per $m \to \infty$, $b_m - a_m \to 0$, per il teorema del confronto $b - a \to 0$

(chiaramente, infatti, $0 \to 0$). Tuttavia $b-a$ è costante, da cui si deduce che $b-a=0 \Rightarrow a=b$. Pertanto $[a,b]=\{a\}$. Allora, da (i), si ricava che $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a,b] = \{a\}$. Se dunque $x_n \in I_n \ \forall n \geq 1$, vale che $a_n \leq x_n \leq b_n \ \forall n \geq 1$. Allora, poiché $a = \sup a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$ e $a = b = \inf b_n = \lim_{n\to\infty} b_n$, per il teorema del confronto $x_n \to a$ per $n \to \infty$, per cui vale (ii). $\square$

Teorema Sia (x_n) una successione di Cauchy. Allora (x_n) ammette limite finito in $\mathbb{R}$.

Data (x_n), definisco $y_n := \inf\{x_m, m \geq n\}$ e $z_n := \sup\{x_m, m \geq n\}$. Vale sicuramente che $y_n \leq x_n \leq z_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Inoltre y_n cresce così come z_n decresce (infatti y_{n-1} è un minorante di y_n e quindi $y_n \geq y_{n-1}$, e analogamente $z_n \leq z_{n+1}$). Detti $L = \sup y_n$ e $L' = \inf\{z_n\}$.

Poiché (x_n) è di Cauchy, vale che $|x_n - x_{n_\varepsilon}| \leq \varepsilon \ \forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow$
$$\Rightarrow x_{n_\varepsilon} - \varepsilon \leq x_n \leq x_{n_\varepsilon} + \varepsilon \Rightarrow x_{n_\varepsilon} - \varepsilon \leq \underbrace{\inf\{x_n : n \geq n_\varepsilon\}}_{y_{n_\varepsilon}} \leq$$
$$\leq \underbrace{\sup\{x_n : n \geq n_\varepsilon\}}_{z_{n_\varepsilon}} \leq x_{n_\varepsilon} + \varepsilon.$$
Allora vale che
$$x_{n_\varepsilon} - \varepsilon \leq L \leq L' \leq x_{n_\varepsilon} + \varepsilon \Rightarrow 0 \leq L' - L \leq 2\varepsilon.$$

Quindi per $\varepsilon \to 0$, $L' = L$. Allora per il lemma precedente, con $I_n =$

$[y_n, z_n]$, per $n \to \infty$, $x_n \to L \in \mathbb{R}$, e quindi x_n ammette limite finito. $\square$

OSS. È stato sufficiente usare solo una proprietà particolare delle successioni di Cauchy.

Corollario (x_n) ammette limite finito se e solo se è una successione di Cauchy.

Def. Si definisce $\limsup_{n\to\infty} x_n := \inf\{\sup\{x_m \mid m \geq n\}\}$ e $\liminf_{n\to\infty} x_n := \sup\{\inf\{x_m \mid m \geq n\}\}$.

OSS. lim inf e lim sup esistono sempre.

OSS. $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$.

OSS. (x_n) ammette limite se e solo se $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$.

OSS. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon$ t.c. $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon \leq x_n \leq L' + \varepsilon$ dove $L = \liminf_{n\to\infty} x_n$ e $L' = \limsup_{n\to\infty} x_n$.

OSS. $\exists\, x_{m_k}$ di $x_m \mid \lim_{m\to\infty} x_{m_k} = \limsup_{m\to\infty} x_m$.

OSS. $\exists\, x_{m_k}$ di $x_m \mid \lim_{m\to\infty} x_{m_k} = \liminf_{m\to\infty} x_m$.

OSS. $\exists \lim_{m\to\infty} x_{m_k} = L \Rightarrow \liminf_{m\to\infty} x_m \leq L \leq \limsup_{m\to\infty} x_m$.

Teorema (di Bolzano-Weierstrass) Data (x_m) successione in $\mathbb{R}$ limitata esiste (x_{m_k}) sottosuccessione t.c. $x_{m_k} \to L \in \mathbb{R}$.
Data (x_m) successione in $\overline{\mathbb{R}}$ esiste (x_{m_k}) sottosuccessione t.c. $x_{m_k} \to L \in \overline{\mathbb{R}}$.

(i) Sia $I_0 = [a,b]$ dove a, b sono t.c. $a \leq x_m \leq b\ \forall m \in \mathbb{N}$. Sia I_1 una delle due metà dove x_m ha infiniti infiniti e così $\forall\, m \in \mathbb{N}$.

Definisco $m_0 = 0$. Prendo $m_1 > m_0$ t.c. $x_{m_1} \in I_1$, $m_2 > m_1$ t.c. $x_{m_2} \in I_2$, ... Gli I_k sono t.c. $I_0 \supset I_1 \supset \dots$. Poiché $\lim_{n\to\infty} |I_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$, per il lemma sulla successione degli intervalli, (x_{m_k}) ammette limite in $\sup a_k = \inf b_k$.

Prop. Dato $E \neq \emptyset$, $E \subset \mathbb{R}$, allora $\exists (x_n)$ in $E \mid \lim_{n\to\infty} x_n = \sup E$.

Se $\sup E \in E$, è sufficiente considerare $x_n := \overbrace{\max E}^{\sup E}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Se $\sup E = L \in \mathbb{R}$ è finito, $\forall n \in \mathbb{N}$, $L - \frac{1}{n} < L \Rightarrow L - \frac{1}{n}$ non è un maggiorante. Allora $\exists\, y_n \in E \mid y_n > L - \frac{1}{n}$. Sia allora (x_n) definita con tali y_n $\forall n \in \mathbb{N}$. Poiché $L - \frac{1}{n} < x_n \leq L$ e $\lim_{n\to\infty} L - \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} L = L$, $x_n \to L$ per $n \to L$, per il teorema del confronto.

Se $\sup E = +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists\, y_n \in E \mid y_n > n$. Si considera allora (x_n) definita con tali y_n $\forall n \in \mathbb{N}$. Analogamente a prima, $x_n \to \infty$ per $n \to \infty$, da cui la tesi. $\square$

Prop. Dato $E \neq \emptyset$, $E \subset \mathbb{R}$, allora $\exists (x_n)$ in $E \mid \lim_{n\to\infty} x_n = \sup E$ e che (x_n) sia crescente.

Sia (y_n) la successione costruita nella precedente proposizione. Si costruisce allora la sottosuccessione $x_n := \max\{y_1, \dots, y_n\}$. Vale sicuramente che (x_n) è crescente, e quindi $x_n \to \sup E$ per $n \to \infty$. $\square$

OSS. Analogamente si possono dedurre risultati di questo tipo per $\inf E$ osservando che $\inf E = -\sup(-E)$.

Prop. Sia (x_n) una successione e sia $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty) \to$ $\to 0$ per $t \to 0^+$ tale che $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n \geq n_\varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow |x_n - L| \leq \varphi(\varepsilon)$. Allora $x_n \to L$ per $n \to +\infty$.

Poiché $\varphi(t) \to 0$ per $t \to 0$, preso $\varepsilon > 0 \; \exists \, \delta_\varepsilon \in \mathbb{R} \mid t \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow$ $\Rightarrow \varphi(t) \leq \varepsilon$. In particolare $\varphi(\delta_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Pertanto $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \, n_{\delta_\varepsilon} \in \mathbb{N} \mid n \geq n_{\delta_\varepsilon} \Rightarrow |x_n - L| \leq \varphi(\delta_\varepsilon) \leq \varepsilon$. $\square$

OSS. Dato $\underset{\neq \emptyset}{A} \subset B \subset \overline{\mathbb{R}}$, $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

Prop. Sia $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$. Allora $\inf I = a$, $\sup I = b$.

Poiché $\forall x \in I$, $x < b$, $b \in \operatorname{Mag} I$. Sia $c < b \mid c \in \operatorname{Mag} I$, allora sicuramente $a \leq c$ (altrimenti $c \notin \operatorname{Mag} I$). Si consideri $d = \frac{c+b}{2}$: $a \leq c < d < b$: quindi $d \in I$ e $c < d$, assurdo dacché $c \in \operatorname{Mag} I$, $\lightning$. Quindi $b = \min \operatorname{Mag} I \Rightarrow b = \sup I$. Analogamente per a, da cui la tesi. $\square$