I prodotti di uno spazio vettoriale

Dispense del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

A.A. 2022/2023

Università di Pisa

Indice

1 Introduzione al prodotto scalare

Nota. Nel corso del documento, per V, qualora non specificato, si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita n.

1.1 Prime definizioni

1.1.1 Prodotto scalare e vettori ortogonali rispetto a φ

Definizione (prodotto scalare)**.** Un **prodotto scalare** su V è una forma bilineare simmetrica φ con argomenti in V.

Esempio. Sia $\varphi : M(n, \mathbb{K}) \times M(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ tale che $\varphi(A, B) = \operatorname{tr}(AB)$.

▶ $\varphi(A + A', B) = \operatorname{tr}((A + A')B) = \operatorname{tr}(AB + A'B) = \operatorname{tr}(AB) + \operatorname{tr}(A'B) = \varphi(A, B) + \varphi(A', B)$ (linearità nel primo argomento),
▶ $\varphi(\alpha A, B) = \operatorname{tr}(\alpha AB) = \alpha \operatorname{tr}(AB) = \alpha\varphi(A, B)$ (omogeneità nel primo argomento),
▶ $\varphi(A, B) = \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) = \varphi(B, A)$ (simmetria),
▶ poiché φ è simmetrica, φ è lineare e omogenea anche nel secondo argomento, e quindi è una forma bilineare simmetrica, ossia un prodotto scalare su $M(n, \mathbb{K})$.

Definizione (vettori ortogonali)**.** Due vettori $\underline{v}$, $\underline{w} \in V$ si dicono **ortogonali** rispetto al prodotto scalare φ, ossia $\underline{v} \perp \underline{w}$, se $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0$.

Definizione (somma diretta ortogonale)**.** Siano U e $W \subseteq V$ due sottospazi di V in somma diretta. Allora si dice che U e W sono in **somma diretta ortogonale** rispetto al prodotto scalare φ di V, ossia che $U \oplus W = U \oplus^{\perp} W$, se $\varphi(\underline{u}, \underline{w}) = 0 \ \forall\, \underline{u} \in U$, $\underline{w} \in W$.

Definizione. Si definisce prodotto scalare *canonico* di $\mathbb{K}^n$ la forma bilineare simmetrica $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$ con argomenti in $\mathbb{K}^n$ tale che:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \underline{v}^\top \underline{w}, \quad \forall\, \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

Osservazione. Si può facilmente osservare che il prodotto scalare canonico di $\mathbb{K}^n$ è effettivamente un prodotto scalare.

▶ $\varphi(\underline{v_1} + \underline{v_2}, \underline{w}) = (\underline{v_1} + \underline{v_2})^\top \underline{w} = (\underline{v_1}^\top + \underline{v_2}^\top)\underline{w} = \underline{v_1}^\top \underline{w} + \underline{v_2}^\top \underline{w} = \varphi(\underline{v_1}, \underline{w}) + \varphi(\underline{v_2}, \underline{w})$ (linearità nel primo argomento),
▶ $\varphi(\alpha\underline{v}, \underline{w}) = (\alpha\underline{v})^\top \underline{w} = \alpha\underline{v}^\top \underline{w} = \alpha\varphi(\underline{v}, \underline{w})$ (omogeneità nel primo argomento),
▶ $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \underline{v}^\top \underline{w} = (\underline{v}^\top \underline{w})^\top = \underline{w}^\top \underline{v} = \varphi(\underline{w}, \underline{v})$ (simmetria),
▶ poiché φ è simmetrica, φ è lineare e omogenea anche nel secondo argomento, e quindi è una forma bilineare simmetrica, ossia un prodotto scalare su $\mathbb{K}^n$.

Esempio. Altri esempi di prodotto scalare sono i seguenti:

▶ $\varphi(A,B) = \mathrm{tr}(A^\top B)$ per $M(n,\mathbb{K})$,
▶ $\varphi(p(x),q(x)) = p(a)q(a)$ per $\mathbb{K}[x]$, con $a \in \mathbb{K}$,
▶ $\varphi(p(x),q(x)) = \sum_{i=1}^n p(x_i)q(x_i)$ per $\mathbb{K}[x]$, con x_1, ..., x_n distinti,
▶ $\varphi(p(x),q(x)) = \int_a^b p(x)q(x)dx$ per lo spazio delle funzioni integrabili su $\mathbb{R}$, con a, b in $\mathbb{R}$,
▶ $\varphi(\underline{x},\underline{y}) = \underline{x}^\top A\,\underline{y}$ per $\mathbb{K}^n$, con $A \in M(n,\mathbb{K})$ simmetrica, detto anche **prodotto scalare indotto dalla matrice** A, ed indicato con φ_A.

1.1.2 Prodotto definito o semidefinito

Definizione. Sia[1] $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Allora un prodotto scalare φ si dice **definito positivo** ($\varphi > 0$) se $\underline{v} \in V$, $\underline{v} \neq \underline{0} \implies \varphi(\underline{v},\underline{v}) > 0$. Analogamente φ è **definito negativo** ($\varphi < 0$) se $\underline{v} \neq \underline{0} \implies \varphi(\underline{v},\underline{v}) < 0$. In generale si dice che φ è **definito** se è definito positivo o definito negativo.

Infine, φ è **semidefinito positivo** ($\varphi \geq 0$) se $\varphi(\underline{v},\underline{v}) \geq 0\ \forall \underline{v} \in V$ (o **semidefinito negativo**, e quindi $\varphi \leq 0$, se invece $\varphi(\underline{v},\underline{v}) \leq 0\ \forall \underline{v} \in V$). Analogamente ai prodotti definiti, si dice che φ è **semidefinito** se è semidefinito positivo o semidefinito negativo.

Esempio. Il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$ è definito positivo: infatti $\varphi((x_1,...,x_n),(x_1,...,x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$, se $(x_1,...,x_n) \neq \underline{0}$.

Al contrario, il prodotto scalare $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 - x_2y_2$ non è definito positivo: $\varphi((x,y),(x,y)) = 0$, $\forall\ (x,y) \mid x^2 = y^2$, ossia se $y = x$ o $y = -x$.

1.2 Il radicale di un prodotto scalare

1.2.1 La forma quadratica q associata a φ e vettori (an)isotropi

Definizione. Ad un dato prodotto scalare φ di V si associa una mappa $q : V \to \mathbb{K}$, detta **forma quadratica**, tale che $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v},\underline{v})$.

Osservazione. Si osserva che q non è lineare in generale: infatti $q(\underline{v}+\underline{w}) \neq q(\underline{v}) + q(\underline{w})$ in $\mathbb{R}^n$.

Definizione (vettore (an)isotropo)**.** Un vettore $\underline{v} \in V$ si dice **isotropo** rispetto al prodotto scalare φ se $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v},\underline{v}) = 0$. Al contrario, $\underline{v}$ si dice **anisotropo** se non è isotropo, ossia se $q(\underline{v}) \neq 0$.

Definizione (cono isotropo)**.** Si definisce **cono isotropo** di V rispetto al prodotto scalare φ il seguente insieme:

[1] In realtà, la definizione è facilmente estendibile a qualsiasi campo, purché esso sia ordinato.

$$\mathrm{CI}(\varphi) = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0\},$$

ossia l'insieme dei vettori isotropi di V.

Esempio. Rispetto al prodotto scalare $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$, i vettori isotropi sono i vettori della forma (x, y, z) tali che $x^2 + y^2 = z^2$, e quindi $\mathrm{CI}(\varphi)$ è l'insieme dei vettori stanti sul cono di equazione $x^2 + y^2 = z^2$.

1.2.2 Matrice associata a φ e relazione di congruenza

Osservazione. Come già osservato in generale per le applicazioni multilineari, il prodotto scalare è univocamente determinato dai valori che assume nelle coppie $\underline{v_i}, \underline{v_j}$ estraibili da una base $\mathcal{B}$. Infatti, se $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_k})$, $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{v_i}$ e $\underline{w} = \sum_{i=1}^k \beta_i \underline{v_i}$, allora:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_i \beta_j \, \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}).$$

Definizione. Sia φ un prodotto scalare di V e sia $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ una base ordinata di V. Allora si definisce la **matrice associata** a φ come la matrice:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}))_{i,\, j=1—n} \in M(n, \mathbb{K}).$$

Osservazione.
▶ $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è simmetrica, infatti $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi(\underline{v_j}, \underline{v_i})$, dal momento che il prodotto scalare è simmetrico,
▶ $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^\top M_{\mathcal{B}}(\varphi)[\underline{w}]_{\mathcal{B}}$.

Teorema 1.1. (di cambiamento di base per matrici di prodotti scalari) Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi ordinate di V. Allora, se φ è un prodotto scalare di V e $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$, vale la seguente identità:

$$\underbrace{M_{\mathcal{B}'}(\varphi)}_{A'} = P^\top \underbrace{M_{\mathcal{B}}}_{A} P.$$

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ e $\mathcal{B}' = (\underline{w}_1, ..., \underline{w}_n)$. Allora $A'_{ij} = \varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_j) = [\underline{w}_i]_{\mathcal{B}}^\top A[\underline{w}_j]_{\mathcal{B}} = (P^i)^\top AP^j = P_i^\top (AP)^j = (P^\top AP)_{ij}$, da cui la tesi. □

Definizione. Si definisce **congruenza** la relazione di equivalenza $\cong$ (denotata anche come $\equiv$) definita nel seguente modo su $A, B \in M(n, \mathbb{K})$:

$$A \cong B \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, P \in GL(n, \mathbb{K}) \mid A = P^\top AP.$$

Osservazione. Si può facilmente osservare che la congruenza è in effetti una relazione di equivalenza.

▶ $A = I^\top A I \implies A \cong A$ (riflessione),
▶ $A \cong B \implies A = P^\top B P \implies B = (P^\top)^{-1} A P^{-1} = (P^{-1})^\top A P^{-1} \implies B \cong A$ (simmetria),
▶ $A \cong B$, $B \cong C \implies A = P^\top B P$, $B = Q^\top C Q$, quindi $A = P^\top Q^\top C Q P = (QP)^\top C (QP) \implies A \cong C$ (transitività).

Osservazione. Si osservano alcune proprietà della congruenza.

▶ Per il teorema di cambiamento di base del prodotto scalare, due matrici associate a uno stesso prodotto scalare sono sempre congruenti (esattamente come due matrici associate a uno stesso endomorfismo sono sempre simili).
▶ Se A e B sono congruenti, $A = P^\top B P \implies \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(P^\top B P) = \operatorname{rg}(BP) = \operatorname{rg}(B)$, dal momento che P e $P^\top$ sono invertibili; quindi il rango è un invariante per congruenza. Allora si può ben definire il rango $\operatorname{rg}(\varphi)$ di un prodotto scalare come il rango della matrice associata di φ in una qualsiasi base di V.
▶ Se A e B sono congruenti, $A = P^\top B P \implies \det(A) = \det(P^\top B P) = \det(P^\top)\det(B)\det(P) = \det(P)^2 \det(B)$. Quindi, per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il segno del determinante è un altro invariante per congruenza.

1.2.3 Studio del radicale $V^\perp$ attraverso $M_\mathcal{B}(\varphi)$

Definizione. Si definisce il **radicale** di un prodotto scalare φ come lo spazio:

$$V^\perp = \operatorname{Rad}(\varphi) = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \;\forall\, \underline{w} \in V\}$$

Osservazione. Il radicale del prodotto scalare canonico su $\mathbb{R}^n$ ha dimensione nulla, dal momento che $\forall\, \underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$, $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0 \implies \underline{v} \notin V^\perp$. In generale ogni prodotto scalare definito positivo (o negativo) è non degenere, dal momento che ogni vettore non nullo non è isotropo, e dunque non può appartenere a $V^\perp$.

Definizione. Un prodotto scalare si dice **degenere** se il radicale dello spazio su tale prodotto scalare ha dimensione non nulla.

Osservazione. Sia $\alpha_\varphi : V \to V^*$ la mappa[2] tale che $\alpha_\varphi(\underline{v}) = p$, dove $p(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ $\forall\, \underline{v}$, $\underline{w} \in V$.

Si osserva che α_φ è un'applicazione lineare. Infatti, $\forall\, \underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{u} \in V$, $\alpha_\varphi(\underline{v} + \underline{w})(\underline{u}) = \varphi(\underline{v} + \underline{w}, \underline{u}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{w}, \underline{u}) = \alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{u}) + \alpha_\varphi(\underline{w})(\underline{u}) \implies \alpha_\varphi(\underline{v} + \underline{w}) = \alpha_\varphi(\underline{v}) + \alpha_\varphi(\underline{w})$. Inoltre $\forall\, \underline{v}$, $\underline{w} \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\alpha_\varphi(\lambda \underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\lambda \underline{v}, \underline{w}) = \lambda \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \lambda \alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{w}) \implies \alpha_\varphi(\lambda \underline{v}) = \lambda \alpha_\varphi(\underline{v})$.
Si osserva inoltre che $\operatorname{Ker} \alpha_\varphi$ raccoglie tutti i vettori $\underline{v} \in V$ tali che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \;\forall\, \underline{w} \in W$, ossia esattamente i vettori di $V^\perp$, per cui si conclude che $V^\perp = \operatorname{Ker} \alpha_\varphi$ (per cui $V^\perp$ è effettivamente uno spazio vettoriale). Se V ha dimensione finita, $\dim V = \dim V^*$, e si

[2] In letteratura questa mappa, se invertibile, è nota come *isomorfismo musicale*, ed è in realtà indicata come $\flat$.

può allora concludere che $\dim V^\perp > 0 \iff \operatorname{Ker}\alpha_\varphi \neq \{\underline{0}\} \iff \alpha_\varphi$ non è invertibile (infatti lo spazio di partenza e di arrivo di α_φ hanno la stessa dimensione). In particolare, α_φ non è invertibile se e solo se $\det(\alpha_\varphi) = 0$.

Sia $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ una base ordinata di V. Si consideri allora la base ordinata del duale costruita su $\mathcal{B}$, ossia $\mathcal{B}^* = (\underline{v_1^*}, ..., \underline{v_n^*})$. Allora $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\alpha_\varphi)^i = [\alpha_\varphi(\underline{v_i})]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_1}) \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_n}) \end{pmatrix} \underbrace{=}_{\varphi \text{ è simmetrica}} \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v_n}, \underline{v_i}) \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^i$. Quindi $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\alpha_\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Si conclude allora che φ è degenere se e solo se $\det(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = 0$ e che $V^\perp \cong \operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ mediante l'isomorfismo del passaggio alle coordinate.

1.2.4 Condizioni per la (semi)definitezza di un prodotto scalare

Proposizione 1.1. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Allora φ è definito $\iff \operatorname{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

($\implies$) Se φ è definito, allora $\varphi(\underline{v}, \underline{v})$ è sicuramente diverso da zero se $\underline{v} \neq \underline{0}$. Pertanto $\operatorname{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$.

($\impliedby$) Sia φ non definito. Se non esistono $\underline{v} \neq \underline{0}$, $\underline{w} \neq \underline{0} \in V$ tali che $q(\underline{v}) > 0$ e che $q(\underline{w}) < 0$, allora φ è necessariamente semidefinito. In tal caso, poiché φ non è definito, deve anche esistere $\underline{u} \in V$, $\underline{u} \neq \underline{0} \mid q(\underline{u}) = 0 \implies \operatorname{CI}(\varphi) \neq \{\underline{0}\}$.

Se invece tali $\underline{v}$, $\underline{w}$ esistono, questi sono anche linearmente indipendenti. Se infatti non lo fossero, uno sarebbe il multiplo dell'altro, e quindi le loro due forme quadratiche sarebbero concordi di segno, $\lightning$. Si consideri allora la combinazione lineare $\underline{v} + \lambda\underline{w}$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, imponendo che essa sia isotropa:

$$q(\underline{v} + \lambda\underline{w}) = 0 \iff \lambda^2 q(\underline{w}) + 2\lambda q(\underline{v}, \underline{w}) + q(\underline{v}) = 0.$$

Dal momento che $\frac{\Delta}{4} = \overbrace{q(\underline{v}, \underline{w})^2}^{\geq 0} - \overbrace{q(\underline{w})q(\underline{v})}^{>0}$ è sicuramente maggiore di zero, tale equazione ammette due soluzioni reali λ_1, λ_2. In particolare λ_1 è tale che $\underline{v} + \lambda_1\underline{w} \neq \underline{0}$, dal momento che $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente indipendenti. Allora $\underline{v} + \lambda_1\underline{w}$ è un vettore isotropo non nullo di $V \implies \operatorname{CI}(\varphi) \neq \{\underline{0}\}$.

Si conclude allora, tramite la contronominale, che se $\operatorname{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$, φ è necessariamente definito. $\square$

Proposizione 1.2. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Allora φ è semidefinito $\iff \operatorname{CI}(\varphi) = V^\perp$.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

($\implies$) Sia φ semidefinito. Chiaramente $V^\perp \subseteq \mathrm{CI}(\varphi)$. Si assuma per assurdo che $V^\perp \subsetneq \mathrm{CI}(\varphi)$. Sia allora $\underline{v}$ tale che $\underline{v} \in \mathrm{CI}(\varphi)$ e che $\underline{v} \notin V^\perp$. Poiché $\underline{v} \notin V^\perp$, esiste un vettore $\underline{w} \in V$ tale che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) \neq 0$. Si osserva che $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente indipendenti tra loro. Se infatti non lo fossero, esisterebbe $\mu \in \mathbb{R}$ tale che $\underline{w} = \mu\underline{v} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \mu\,\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$, $\lightning$.

Si consideri allora la combinazione lineare $\underline{v} + \lambda\underline{w}$. Si consideri φ semidefinito positivo. In tal caso si può imporre che la valutazione di q in $\underline{v} + \lambda\underline{w}$ sia strettamente negativa:

$$q(\underline{v} + \lambda\underline{w}) < 0 \iff \overbrace{q(\underline{v})}^{=0} + \lambda^2 q(\underline{w}) + 2\lambda\,\varphi(\underline{v}, \underline{w}) < 0.$$

In particolare, dal momento che $\frac{\Delta}{4} = \varphi(\underline{v}, \underline{w})^2 > 0$, tale disequazione ammette una soluzione $\lambda_1 \neq 0$. Inoltre $\underline{v} + \lambda_1\underline{w} \neq \underline{0}$, dal momento che $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente indipendenti. Allora si è trovato un vettore non nullo per cui la valutazione in esso di q è negativa, contraddicendo l'ipotesi di semidefinitezza positiva di φ, $\lightning$. Analogamente si dimostra la tesi per φ semidefinito negativo.

($\impliedby$) Sia φ non semidefinito. Allora devono esistere $\underline{v}$, $\underline{w} \in V$ tali che $q(\underline{v}) > 0$ e che $q(\underline{w}) < 0$. In particolare, $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono linearmente indipendenti tra loro, dal momento che se non lo fossero, uno sarebbe multiplo dell'altro, e le valutazioni in essi di q sarebbero concordi di segno, $\lightning$. Si consideri allora la combinazione lineare $\underline{v} + \lambda\underline{w}$, imponendo che q si annulli in essa:

$$q(\underline{v} + \lambda\underline{w}) = 0 \iff \lambda^2 q(\underline{w}) + 2\lambda q(\underline{v}, \underline{w}) + q(\underline{v}) = 0.$$

In particolare, dal momento che $\frac{\Delta}{4} = \varphi(\underline{v}, \underline{w})^2 > 0$, tale disequazione ammette una soluzione $\lambda_1 \neq 0$. Allora, per tale λ_1, $\underline{v} + \lambda_1\underline{w} \in \mathrm{CI}(\varphi)$. Tuttavia $\varphi(\underline{v} + \lambda_1\underline{w}, \underline{v} - \lambda_1\underline{w}) = q(\underline{v}) - \underbrace{\lambda_1^2 q(\underline{w})}_{<0} > 0 \implies \underline{v} + \lambda_1\underline{w} \notin V^\perp \implies \mathrm{CI}(\varphi) \supsetneq V^\perp$.

Si conclude allora, tramite la contronominale, che se $\mathrm{CI}(\varphi) = V^\perp$, φ è necessariamente semidefinito. □

1.3 Formula delle dimensioni e di polarizzazione rispetto a φ

Definizione (sottospazio ortogonale a W)**.** Sia $W \subseteq V$ un sottospazio di V. Si identifica allora come **sottospazio ortogonale a** W il sottospazio $W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w})\ \forall\, \underline{w} \in W\}$.

Proposizione 1.3 (formula delle dimensioni del prodotto scalare)**.** Sia $W \subseteq V$ un sottospazio di V. Allora vale la seguente identità:

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V + \dim(W \cap V^\perp).$$

Dimostrazione. Si consideri l'applicazione lineare a_φ introdotta precedentemente. Si osserva che $W^\perp = \operatorname{Ker}(i^\top \circ a_\varphi)$, dove $i : W \to V$ è tale che $i(\underline{w}) = \underline{w}$. Allora, per la formula delle dimensioni, vale la seguente identità:

$$\dim V = \dim W^\perp + \operatorname{rg}(i^\top \circ a_\varphi). \tag{1.1}$$

Sia allora $f = i^\top \circ a_\varphi$. Si consideri ora l'applicazione $g = a_\varphi \circ i : W \to V^*$. Sia ora $\mathcal{B}_W$ una base di W e $\mathcal{B}_V$ una base di V. Allora le matrici associate di f e di g sono le seguenti:

(i) $M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_W^*}(f) = M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_W^*}(i^\top \circ a_\varphi) = \underbrace{M^{\mathcal{B}_V^*}_{\mathcal{B}_W^*}(i^\top)}_{A}\underbrace{M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V^*}(a_\varphi)}_{B} = AB,$

(ii) $M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V^*}(g) = M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V^*}(a_\varphi \circ i) = \underbrace{M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V^*}(a_\varphi)}_{B}\underbrace{M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V}(i)}_{A^\top} = BA^\top \overbrace{=}^{B^\top = B} (AB)^\top.$

Poiché $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^\top)$, si deduce che $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(g) \implies \operatorname{rg}(i^\top \circ a_\varphi) = \operatorname{rg}(a_\varphi \circ i) = \operatorname{rg}(a_\varphi|_W) = \dim W - \dim \operatorname{Ker} a_\varphi|_W$, ossia che:

$$\operatorname{rg}(i^\top \circ a_\varphi) = \dim W - \dim(W \cap \underbrace{\operatorname{Ker} a_\varphi}_{V^\perp}) = \dim W - \dim(W \cap V^\perp). \tag{1.2}$$

Si conclude allora, sostituendo l'equazione (1.2) nell'equazione (1.1), che $\dim V = \dim W^\top + \dim W - \dim(W \cap V^\perp)$, ossia la tesi. □

Osservazione. Si identifica $\underline{w}^\perp$ come il sottospazio di tutti i vettori di V ortogonali a $\underline{w}$. In particolare, se $W = \operatorname{Span}(\underline{w})$ è il sottospazio generato da $\underline{w} \neq \underline{0}$, $\underline{w} \in V$, allora $W^\perp = \underline{w}^\perp$. Inoltre valgono le seguenti equivalenze: $\underline{w} \notin W^\perp \iff \operatorname{Rad}(\varphi|_W) = W \cap W^\perp = \{\underline{0}\} \iff \underline{w}$ non è isotropo $\iff V = W \oplus^\perp W^\perp$.

In generale, se W è un sottospazio qualsiasi di V tale che $W \cap W^\perp = \{\underline{0}\}$, vale che $V = W \oplus^\perp W^\perp$.

Proposizione 1.4 (formula di polarizzazione)**.** Se $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$, un prodotto scalare è univocamente determinato dalla sua forma quadratica q. In particolare vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w})}{2}.$$

1.4 Il teorema di Lagrange e basi ortogonali

Definizione. Si definisce **base ortogonale** di V una base $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_n}$ tale per cui $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = 0 \impliedby i \neq j$, ossia una base per cui la matrice associata del prodotto scalare è diagonale.

Teorema 1.2 (di Lagrange)**.** Ogni spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ tale per cui $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$ ammette una base ortogonale.

Dimostrazione. Si dimostra il teorema per induzione su $n := \dim V$. Per $n \leq 1$, la tesi è triviale (se esiste una base, tale base è già ortogonale). Sia allora il teorema vero per $i \leq n$. Se V ammette un vettore non isotropo $\underline{w}$, sia $W = \operatorname{Span}(\underline{w})$ e si consideri la decomposizione $V = W \oplus W^\perp$. Poiché $W^\perp$ ha dimensione $n-1$, per ipotesi induttiva ammette una base ortogonale. Inoltre, tale base è anche ortogonale a W, e quindi l'aggiunta di $\underline{w}$ a questa base ne fa una base ortogonale di V. Se invece V non ammette vettori non isotropi, ogni forma quadratica è nulla, e quindi il prodotto scalare è nullo per la *formula di polarizzazione.* Allora in questo caso ogni base è una base ortogonale, completando il passo induttivo, e dunque la dimostrazione. □

1.4.1 L'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Definizione (coefficiente di Fourier)**.** Siano $\underline{v} \in V$ e $\underline{w} \in V \setminus \operatorname{CI}(\varphi)$. Allora si definisce il **coefficiente di Fourier** di $\underline{v}$ rispetto a $\underline{w}$ come il rapporto $C(\underline{w}, \underline{v}) = \frac{\varphi(\underline{v},\underline{w})}{\varphi(\underline{w},\underline{w})}$.

Algoritmo 1.1 (algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt)**.** Se $\operatorname{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$ (e quindi nel caso di $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, dalla *Proposizione 1.1*, se φ è definito) ed è data una base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ per V, è possibile applicare l'**algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt** per ottenere da $\mathcal{B}$ una nuova base $\mathcal{B}' = \{\underline{v_1}', \ldots, \underline{v_n}'\}$ con le seguenti proprietà:

(i) $\mathcal{B}'$ è una base ortogonale,

(ii) $\mathcal{B}'$ mantiene la stessa bandiera di $\mathcal{B}$ (ossia $\operatorname{Span}(\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_i}) = \operatorname{Span}(\underline{v_1}', \ldots, \underline{v_i}')$ per ogni $1 \leq i \leq n$).

L'algoritmo si applica nel seguente modo: si prenda in considerazione $\underline{v_1}$ e si sottragga ad ogni altro vettore della base il vettore $C(\underline{v_1}, \underline{v_i})\, \underline{v_1} = \frac{\varphi(\underline{v_1},\underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_1},\underline{v_1})}\underline{v_1}$, rendendo ortogonale ogni altro vettore della base con $\underline{v_1}$. Si sta quindi applicando la mappa $\underline{v_i} \mapsto \underline{v_i} - \frac{\varphi(\underline{v_1},\underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_1},\underline{v_1})}\underline{v_i} = \underline{v_i}^{(1)}$. Si verifica infatti che $\underline{v_1}$ e $\underline{v_i}^{(1)}$ sono ortogonali per $2 \leq i \leq n$:

$$\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}^{(1)}) = \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) - \varphi\left(\underline{v_1}, \frac{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})}\underline{v_i}\right) = \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) - \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) = 0.$$

Poiché $\underline{v_1}$ non è isotropo, si deduce che vale la decomposizione $V = \operatorname{Span}(\underline{v_1}) \oplus \operatorname{Span}(\underline{v_1})^\perp$. In particolare $\dim \operatorname{Span}(\underline{v_1})^\perp = n-1$: essendo allora i vettori $\underline{v_2}^{(1)}, \ldots, \underline{v_n}^{(1)}$ linearmente indipendenti e appartenenti a $\operatorname{Span}(\underline{v_1})^\perp$, ne sono una base. Si conclude quindi che vale la seguente decomposizione:

$$V = \operatorname{Span}(\underline{v_1}) \oplus^\perp \operatorname{Span}(\underline{v_2}^{(1)}, \ldots, \underline{v_n}^{(1)}).$$

Si riapplica dunque l'algoritmo di Gram-Schmidt prendendo come spazio vettoriale lo spazio generato dai vettori a cui si è applicato precedentemente l'algoritmo, ossia $V' = \operatorname{Span}(\underline{v_2}^{(1)}, \ldots, \underline{v_n}^{(1)})$, fino a che non si ottiene $V' = \{\underline{0}\}$.

Esempio. Si consideri $V = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, ossia $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard. Si applica l'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt sulla seguente base:

$$\mathcal{B} = \Biggl\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v_1} = \underline{e_1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v_2}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{v_3}} \Biggr\}.$$

Alla prima iterazione dell'algoritmo si ottengono i seguenti vettori:

- $\underline{v_2}^{(1)} = \underline{v_2} - \frac{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_2})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})} \underline{v_1} = \underline{v_2} - \underline{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e_2}$,

- $\underline{v_3}^{(1)} = \underline{v_3} - \frac{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_3})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})} \underline{v_1} = \underline{v_3} - \underline{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si considera ora $V' = \operatorname{Span}(\underline{v_2}^{(1)}, \underline{v_3}^{(1)})$. Alla seconda iterazione dell'algoritmo si ottiene allora il seguente vettore:

- $\underline{v_3}^{(2)} = \underline{v_3}^{(1)} - \frac{\varphi(\underline{v_2}^{(1)}, \underline{v_3}^{(1)})}{\varphi(\underline{v_2}^{(1)}, \underline{v_2}^{(1)})} \underline{v_2}^{(1)} = \underline{v_3}^{(1)} - \underline{v_2}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e_3}$.

Quindi la base ottenuta è $\mathcal{B}' = \{\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3}\}$, ossia la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

1.5 Il teorema di Sylvester

1.5.1 Caso complesso

Nota. D'ora in poi, nel corso del documento, si assumerà $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$.

Teorema 1.3 (di Sylvester, caso complesso)**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo i cui elementi sono tutti quadrati di un altro elemento del campo (e.g. $\mathbb{C}$). Allora esiste una base ortogonale $\mathcal{B}$ tale per cui:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dimostrazione. Per il teorema di Lagrange, esiste una base ortogonale $\mathcal{B}'$ di V. Si riordini allora la base $\mathcal{B}'$ in modo tale che la forma quadratica valutata nei primi elementi sia sempre diversa da zero. Allora, poiché ogni elemento di $\mathbb{K}$ è per ipotesi quadrato di un altro elemento di $\mathbb{K}$, si sostituisca $\mathcal{B}'$ con una base $\mathcal{B}$ tale per cui, se $q(\underline{v_i}) = 0$, $\underline{v_i} \mapsto \underline{v_i}$, e altrimenti $\underline{v_i} \mapsto \frac{\underline{v_i}}{\sqrt{q(\underline{v_i})}}$. Allora $\mathcal{B}$ è una base tale per cui la matrice associata del prodotto scalare in tale base è proprio come desiderata nella tesi, dove r è il numero di elementi tali per cui la forma quadratica valutata in essi sia diversa da zero. $\square$

Osservazione.
▶ Si può immediatamente concludere che il rango è un invariante completo per la congruenza in un campo $\mathbb{K}$ in cui tutti gli elementi sono quadrati, ossia che $A \cong B \iff \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$, se A e B sono matrici simmetriche con elementi in $\mathbb{K}$.

Ogni matrice simmetrica rappresenta infatti un prodotto scalare, ed è pertanto congruente ad una matrice della forma desiderata nell'enunciato del teorema di Sylvester complesso. Poiché il rango è un invariante della congruenza, si ricava che r nella forma della matrice di Sylvester, rappresentando il rango, è anche il rango di ogni sua matrice congruente.

In particolare, se due matrici simmetriche hanno lo stesso rango, allora sono congruenti alla stessa matrice di Sylvester, e quindi, essendo la congruenza una relazione di equivalenza, sono congruenti a loro volta tra di loro.

▶ Due matrici simmetriche in $\mathbb{K}$ con stesso rango, allora, non solo sono SD-equivalenti, ma sono anche congruenti.

▶ Ogni base ortogonale deve quindi avere lo stesso numero di vettori isotropi, dal momento che tale numero rappresenta la dimensione del radicale $V^\perp$.

1.5.2 Caso reale e segnatura di φ

Definizione (segnatura di un prodotto scalare)**.** Data una base ortogonale $\mathcal{B}$ di V rispetto al prodotto scalare φ, si definiscono i seguenti indici:

$$\begin{aligned} \iota_+(\varphi) &= \max\{\dim W \mid W \subseteq V \text{ e } \varphi|_W > 0\}, && \textbf{(indice di positività)} \\ \iota_-(\varphi) &= \max\{\dim W \mid W \subseteq V \text{ e } \varphi|_W < 0\}, && \textbf{(indice di negatività)} \\ \iota_0(\varphi) &= \dim V^\perp. && \textbf{(indice di nullità)} \end{aligned}$$

Quando il prodotto scalare φ è noto dal contesto, si semplifica la notazione scrivendo solo ι_+, ι_- e ι_0. In particolare, la terna $\sigma(\varphi) = \sigma = (i_+, i_-, i_0)$ è detta **segnatura** del prodotto φ.

Teorema 1.4 (di Sylvester, caso reale)**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo ordinato i cui elementi positivi sono tutti quadrati (e.g. $\mathbb{R}$). Allora esiste una base ortogonale $\mathcal{B}$ tale per cui:

$$M_\mathcal{B}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{\iota_+} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_{\iota_-} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \cdot I_{\iota_0} \end{array}\right).$$

Inoltre, per ogni base ortogonale, esistono esattamente ι_+ vettori della base con forma quadratica positiva, ι_- con forma negativa e ι_0 con forma nulla.

Dimostrazione. Per il teorema di Lagrange, esiste una base ortogonale $\mathcal{B}'$ di V. Si riordini la base in modo tale che la forma quadratica valutata nei primi elementi sia strettamente positiva, che nei secondi elementi sia strettamente negativa e che negli ultimi sia nulla. Si sostituisca $\mathcal{B}'$ con una base $\mathcal{B}$ tale per cui, se $q(\underline{v_i}) > 0$, allora $\underline{v_i} \mapsto \frac{\underline{v_i}}{\sqrt{q(\underline{v_i})}}$; se $q(\underline{v_i}) < 0$, allora $\underline{v_i} \mapsto \frac{\underline{v_i}}{\sqrt{-q(\underline{v_i})}}$; altrimenti $\underline{v_i} \mapsto \underline{v_i}$. Si è allora trovata una base la cui matrice associata del prodotto scalare è come desiderata nella tesi.

Sia ora $\mathcal{B}$ una qualsiasi base ortogonale di V. Siano inoltre a il numero di vettori della base con forma quadratica positiva, b il numero di vettori con forma negativa e c quello dei vettori con forma nulla. Si consideri $W_+ = \mathrm{Span}(\underline{v_1}, ..., \underline{v_a})$, $W_- = \mathrm{Span}(\underline{v_{a+1}}, ..., \underline{v_b})$, $W_0 = \mathrm{Span}(\underline{v_{b+1}}, ..., \underline{v_c})$.

Sia $M = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Si osserva che $c = n - \mathrm{rg}(M) = \dim \mathrm{Ker}(M) = \dim V^\perp = \iota_0$. Inoltre $\forall\, \underline{v} \in W_+$, dacché $\mathcal{B}$ è ortogonale, $q(\underline{v}) = q(\sum_{i=1}^a \alpha_i \underline{v_i}) = \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 q(\underline{v_i}) > 0$, e quindi $\varphi|_{W_+} > 0$, da cui $\iota_+ \geq a$. Analogamente $\iota_- \geq b$.

Si mostra ora che è impossibile che $\iota_+ > a$. Se così infatti fosse, sia W tale che $\dim W = \iota_+$ e che $\varphi|_W > 0$. $\iota_+ + b + c$ sarebbe maggiore di $a + b + c = n := \dim V$. Quindi, per la formula di Grassman, $\dim(W + W_- + W_0) = \dim W + \dim(W_- + W_0) - \dim(W \cap (W_- + W_0)) \implies \dim(W \cap (W_- + W_0)) = \dim W + \dim(W_- + W_0) - \dim(W + W_- + W_0) > 0$, ossia esisterebbe $\underline{v} \neq \{\underline{0}\} \mid \underline{v} \in W \cap (W_- + W_0)$. Tuttavia questo è assurdo, dacché dovrebbe valere sia $q(\underline{v}) > 0$ che $q(\underline{v}) < 0$, ↯. Quindi $\iota_+ = a$, e analogamente $\iota_- = b$. $\square$

Definizione. Si dice **base di Sylvester** una base di V tale per cui la matrice associata di φ sia esattamente nella forma vista nell'enunciato del teorema di Sylvester. Analogamente si definisce tale matrice come **matrice di Sylvester**.

Osservazione.

▶ Come conseguenza del teorema di Sylvester reale, si osserva che la segnatura di una matrice simmetrica reale è invariante per cambiamento di base, se la base è ortogonale.

▶ La segnatura è un invariante completo per la congruenza nel caso reale. Se infatti due matrici hanno la stessa segnatura, queste sono entrambe congruenti alla stessa matrice di Sylvester, e quindi, essendo la congruenza una relazione di equivalenza, sono congruenti tra loro. Analogamente vale il viceversa, dal momento che ogni base ortogonale di due matrici congruenti deve contenere gli stessi numeri ι_+, ι_- e ι_0 di vettori di base con forma quadratica positiva, negativa e nulla.

▶ Vale che φ è definito positivo $\iff \sigma = (n, 0, 0)$. Infatti, per il teorema di Sylvester reale, $i_+ = n \iff$ la dimensione del massimo sottospazio di V su cui φ è definito positivo è $n \iff \varphi$ è definito positivo. Analogamente φ è definito negativo $\iff \sigma = (0, n, 0)$.

▶ Nello stesso spirito dei prodotti definiti, φ è semidefinito positivo $\iff \iota_- = 0$. Infatti valgono le seguenti equivalenze: φ è semidefinito positivo $\iff$ non esiste un vettore $\underline{v} \in V$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ tale che $q(\underline{v}) < 0 \iff \iota_- = 0$. Analogamente φ è semidefinito negativo $\iff \iota_+ = 0$.

▶ Se $\underline{w_1}$, ..., $\underline{w_k}$ sono tutti i vettori di una base ortogonale $\mathcal{B}$ con forma quadratica nulla, si osserva che $W = \operatorname{Span}(\underline{w_1}, ..., \underline{w_k})$ altro non è che $V^\perp$ stesso.

Infatti, come visto anche nella dimostrazione del teorema di Sylvester reale, vale che $\dim W = \dim \operatorname{Ker}(M_\mathcal{B}(\varphi)) = \dim V^\perp$. Sia allora la base $\mathcal{B} = \{\underline{w_1}, \ldots, \underline{w_k}, \underline{v_{k+1}}, \ldots, \underline{v_n}\}$ un'estensione di $\{\underline{w_1}, \ldots, \underline{w_k}\}$. Se $\underline{w} \in W$ e $\underline{v} \in V$, $\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = \varphi(\sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{w_i}, \sum_{i=1}^k \beta_i \underline{w_i} + \sum_{i=k+1}^n \beta_i \underline{v_i}) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_i q(\underline{w_i}) = 0$ (dove α_i e $\beta_i \in \mathbb{K}$ rappresentano la i-esima coordinata di $\underline{w}$ e $\underline{v}$ nella base $\mathcal{B}$), e quindi $W \subseteq V^\perp$. Si conclude allora, tramite l'uguaglianza dimensionale, che $W = V^\perp$.

▶ Poiché $\dim \operatorname{Ker}(\varphi) = \iota_0$, vale in particolare che $\operatorname{rg}(\varphi) = n - \iota_0 = \iota_+ + \iota_-$ (infatti vale che $n = \iota_+ + \iota_- + \iota_0$, dal momento che n rappresenta il numero di elementi di una base ortogonale).

▶ Se $V = U \oplus^\perp W$, allora $\iota_+(\varphi) = \iota_+(\varphi|_U) + \iota_+(\varphi|_W)$. Analogamente vale la stessa cosa per gli altri indici. Infatti, prese due basi ortogonali $\mathcal{B}_U$, $\mathcal{B}_W$ di U e W, la loro unione $\mathcal{B}$ è una base ortogonale di V. Pertanto il numero di vettori della base $\mathcal{B}$ con forma quadratica positiva è esattamente $\iota_+(\varphi|_U) + \iota_+(\varphi|_W)$.

▶ In generale, se W è un sottospazio di V, vale che $\iota_+(\varphi) \geq \iota_+(\varphi|_W)$. Infatti, se U è un sottospazio di W di dimensione $\iota_+(\varphi|_W)$ tale che $(\varphi|_W)|_U > 0$, allora U è in particolare un sottospazio di V tale che $\varphi|_U > 0$. Pertanto, per definizione, essendo $\iota_+(\varphi)$ la dimensione del massimo sottospazio su cui φ, ristretto ad esso, è definito positivo, deve valere che $\iota_+(\varphi) \geq \iota_+(\varphi|_W)$. Analogamente, $\iota_-(\varphi) \geq \iota_-(\varphi|_W)$.

1.5.2.1 Classificazione delle segnature per $n = 1, 2, 3$

Sia $\mathcal{B}$ una base di Sylvester per φ. Sia $A = M_\mathcal{B}(\varphi)$. Si indica con x, y e z le tre coordinate di $\underline{v} \in V$ secondo la base $\mathcal{B}$.

($n = 1$) Vi sono solo tre possibili matrici per A:

- $A = (0)$, con $\sigma = (0, 0, 1)$, $\operatorname{rg}(\varphi) = 0$ e $\operatorname{CI}(\varphi) = V$,
- $A = (1)$, con $\sigma = (1, 0, 0)$, $\operatorname{rg}(\varphi) = 1$ e $\operatorname{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$,
- $A = (-1)$, con $\sigma = (0, 1, 0)$, $\operatorname{rg}(\varphi) = 1$ e $\operatorname{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$.

($n = 2$) Vi sono sei possibili matrici per A:

- $A = 0$, con $\sigma = (0, 0, 2)$, $\operatorname{rg}(\varphi) = 0$ e $\operatorname{CI}(\varphi) = V$,

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, con $\sigma = (1, 0, 1)$, $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$ e $\mathrm{CI}(\varphi) = \{x = 0 \mid \underline{v} \in V\} = V^\perp$,
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, con $\sigma = (0, 1, 1)$, $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$ e $\mathrm{CI}(\varphi) = \{x = 0 \mid \underline{v} \in V\} = V^\perp$,
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, con $\sigma = (1, 1, 0)$, $\mathrm{rg}(\varphi) = 2$ e $\mathrm{CI}(\varphi) = \{x^2 = y^2 \mid \underline{v} \in V\}$,
- $A = I_2$, con $\sigma = (2, 0, 0)$, $\mathrm{rg}(\varphi) = 2$ e $\mathrm{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$,
- $A = -I_2$, con $\sigma = (0, 2, 0)$, $\mathrm{rg}(\varphi) = 2$ e $\mathrm{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$.

Si osserva in particolare che $\det(A) = -1 \iff \sigma = (1, 1, 0)$. Pertanto se M è una matrice associata al prodotto scalare φ in una base $\mathcal{B}'$, $\det(M) < 0 \iff \sigma = (1, 1, 0)$.

($n = 3$) Se A contiene almeno uno zero nella diagonale, si può studiare A riconducendosi al caso $n = 2$, considerando la matrice $A_{1,2}^{1,2}$, e incrementando di uno l'indice di nullità di φ (eventualmente considerando anche come varia il cono isotropo). Altrimenti A può essere rappresentato dalle seguenti quattro matrici:

- $A = I_3$, con $\sigma = (3, 0, 0)$, $\mathrm{rg}(\varphi) = 3$ e $\mathrm{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$,
- $A = -I_3$, con $\sigma = (0, 3, 0)$, $\mathrm{rg}(\varphi) = 3$ e $\mathrm{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$,
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, con $\sigma = (2, 1, 0)$, $\mathrm{rg}(\varphi) = 3$ e $\mathrm{CI}(\varphi) = \{x^2 + y^2 = z^2 \mid \underline{v} \in V\}$,
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, con $\sigma = (1, 2, 0)$, $\mathrm{rg}(\varphi) = 3$ e $\mathrm{CI}(\varphi) = \{y^2 + z^2 = x^2 \mid \underline{v} \in V\}$.

Si osserva infine che, se $V = \mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}$ ne è la base canonica, i coni isotropi delle ultime due matrici rappresentano proprio due coni nello spazio tridimensionale.

1.5.2.2 Metodo di Jacobi per il calcolo della segnatura

Proposizione 1.5. Sia $\mathbb{K}$ un campo ordinato i cui elementi positivi sono tutti quadrati (e.g. $\mathbb{R}$). Sia W un sottospazio di V di dimensione k. Sia W' un sottospazio di V di dimensione $k + 1$. Sia $\sigma(\varphi|_W) = (p, q, 0)$, con p, $q \in \mathbb{N}$ e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di W e W'. Siano $B = M_{\mathcal{B}}(\varphi|_{W'})$ e $B' = M_{\mathcal{B}'}(\varphi|_W))$.

Sia $d := \dfrac{\det(B')}{\det(B)}$. Allora vale che:

$$\sigma(\varphi|_{W'}) = \begin{cases} (p + 1, q, 0) & \text{se } d > 0, \\ (p, q + 1, 0) & \text{se } d < 0, \\ (p, q, 1) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrazione. Dalle precedenti osservazioni, vale che $\iota_+(\varphi|_{W'}) \geq \iota_+(\varphi|_W)$ e che $\iota_-(\varphi|_{W'}) \geq \iota_-(\varphi|_W)$. Inoltre $\varphi|_W$ è non degenere dal momento che $\iota_0(\varphi|_W) = 0$, e pertanto $p + q = \mathrm{rg}(\varphi|_W) = k$.

Siano ora $\mathcal{B}_\perp$ e $\mathcal{B}'_\perp$ due basi di Sylvester di W e W'. Siano $A = M_{\mathcal{B}_\perp}(\varphi|_W)$ e $A' = M_{\mathcal{B}'_\perp}(\varphi|_W)$. Allora $\det(A) = (-1)^p(-1)^q$, mentre $\det(A') = (-1)^p(-1)^q\, d'$, dove $d' \in \{-1, 0, 1\}$. Allora $\det(A') = \det(A)d' \implies d' = \frac{\det(A')}{\det(A)}$, dal momento che $\det(A) \neq 0$, essendo $\varphi|_W$ non degenere.

In particolare, $\sigma(\varphi|_{W'}) = (p, q, 1)$ se e solo se $\det(A') = 0 \implies d' = 0$. Dal momento che $\det(A') = 0 \iff \det(B') = 0$, $d' = 0 \iff d = 0$. Pertanto si conclude che $\sigma(\varphi|_{W'}) = (p, q, 1) \iff d = 0$.

Al contrario, $\sigma(\varphi|_{W'}) = (p+1, q, 0)$ se e solo se $d' = 1$, ossia se e solo se $\det(A')$ e $\det(A)$ sono concordi di segno. Dal momento che il segno è un invariante del cambiamento di base per la matrice associata a φ, $d' = 1$ se e solo se $\det(B)$ e $\det(B')$ sono concordi di segno, ossia se e solo se $d > 0$. Pertanto $\sigma(\varphi|_{W'}) = (p + 1, q, 0) \iff d > 0$. Analogamente si verifica che $\sigma(\varphi|_{W'}) = (p, q + 1, 0) \iff d < 0$, da cui la tesi. $\square$

Algoritmo 1.2 (metodo di Jacobi)**.** Sia $\mathcal{B}$ una base di V e sia $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Se il determinante di ogni minore di testa[3] di A (ossia dei minori della forma $A^{1,\ldots,i}_{1,\ldots,i}$, con $1 \leq i \leq n-1$) è diverso da zero, è possibile applicare il **metodo di Jacobi** per il calcolo della segnatura di φ.

Sia $d_i = \det\left(A^{1,\ldots,i}_{1,\ldots,i}\right)$ $\forall\, 1 \leq i \leq n$ e si ponga $d_0 := 1$. Allora, per la *Proposizione 1.5*, ι_+ corrisponde al numero di permanenze del segno tra elementi consecutivi (escludendo 0) di (d_i), mentre ι_- corrisponde al numero di variazioni del segno (anche stavolta escludendo 0). Infine ι_0 può valere solo 0 o 1, dove $\iota_0 = 1 \iff \det(A) = 0$.

Esempio. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{R})$.

Si calcola la segnatura di φ_A mediante il metodo di Jacobi. Poiché A è la matrice associata di φ_A nella base canonica di $\mathbb{R}^3$, si può applicare il metodo di Jacobi direttamente su A.

Si calcola allora la successione dei d_i:

1. $d_1 = \det(1) = 1$,
2. $d_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$,

[3] In realtà il metodo si estende ad ogni successione di minori coerente con un'estensione di base (i.e. i minori principali di A).

3. $d_3 = \det(A) = (8-1) - 4 = 3$.

Dal momento che vi sono tre permanenze di segno, si conclude che $\sigma(\varphi_A) = (3, 0, 0)$, ossia che φ_A è definito positivo.

1.5.2.3 Criterio di Sylvester per la definitezza di un prodotto scalare

Proposizione 1.6 (criterio di Sylvester per i prodotti definiti)**.** Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sia $\mathcal{B}$ una base di V, e sia $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$. Sia $d_i = \det\left(A^{1,\ldots,i}_{1,\ldots,i}\right)$. Allora φ è definito positivo se e solo se $d_i > 0 \ \forall\, 1 \leq i \leq n$. Analogamente φ è definito negativo se e solo se $(-1)^i\, d_i > 0$ $\forall\, 1 \leq i \leq n$.

Dimostrazione. Si osserva che φ è definito positivo se e solo se $\iota_+ = n$. Pertanto, per il *metodo di Jacobi*, φ è definito positivo se e solo se vi sono solo permanenze di segno tra elementi consecutivi nella successione (d_i), e quindi se e solo se $d_i > 0 \ \forall\, 1 \leq i \leq n$. Analogamente φ è definito negativo se e solo se $\iota_- = n$, e quindi se e solo se vi sono solo variazioni di segno $\iff$ $d_i > 0$ se i è pari e $d_i < 0$ se i è dispari $\iff$ $(-1)^i\, d_i > 0$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$. □

1.5.2.4 Sottospazi isotropi e indice di Witt

Definizione (sottospazio isotropo)**.** Sia W un sottospazio di V. Allora si dice che W è un **sottospazio isotropo** di V se $\varphi|_W = 0$.

Osservazione.
- ▶ $V^\perp$ è un sottospazio isotropo di V.
- ▶ $\underline{v}$ è un vettore isotropo $\iff$ $W = \operatorname{Span}(\underline{v})$ è un sottospazio isotropo di V.
- ▶ $W \subseteq V$ è isotropo $\iff$ $W \subseteq W^\perp$.

Proposizione 1.7. Sia φ non degenere. Se W è un sottospazio isotropo di V, allora $\dim W \leq \frac{1}{2} \dim V$.

Dimostrazione. Poiché W è un sottospazio isotropo di V, vale che $W \subseteq W^\perp$. Allora vale che:

$$\dim W \leq \dim W^\perp. \tag{1.3}$$

Inoltre, dal momento che φ è non degenere, vale anche che:

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V \implies \dim W^\perp = \dim V - \dim W. \tag{1.4}$$

Sostituendo allora l'equazione (1.4) nella disuguaglianza (1.3), si ottiene che $\dim W \leq \frac{1}{2} \dim V$, ossia la tesi. □

Definizione (indice di Witt)**.** Si definisce l'**indice di Witt** $W(\varphi)$ di (V, φ) come la massima dimensione di un sottospazio isotropo di V.

Osservazione.
▶ Se $\varphi > 0$ o $\varphi < 0$, $W(\varphi) = 0$. Infatti ogni sottospazio non nullo W di V non ammette vettori isotropi, da cui si deduce che $\varphi|_W \neq 0$.
▶ Se φ è non degenere, per la *Proposizione 1.7*, vale che $W(\varphi) \leq \frac{1}{2} \dim V$.

Proposizione 1.8. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e sia φ non degenere. Allora $W(\varphi) = \min\{\iota_+(\varphi), \iota_-(\varphi)\}$.

Dimostrazione. Senza perdità di generalità si assuma $\iota_-(\varphi) \leq \iota_+(\varphi)$ (il caso $\iota_-(\varphi) > \iota_+(\varphi)$ è analogo). Sia W un sottospazio con $\dim W > \iota_-(\varphi)$. Sia W^+ un sottospazio con $\dim W^+ = \iota_+(\varphi)$ e $\varphi|_{W^+} > 0$. Allora, per la formula di Grassmann, $n \geq \dim(W + W^+) = \dim W + \dim W^+ - \dim(W \cap W^+) > n - \dim(W \cap W^+) \implies \dim(W \cap W^+) > 0$. Quindi $\exists\, \underline{w} \in W$, $\underline{w} \neq \underline{0}$ tale che $\varphi(\underline{w}, \underline{w}) > 0$, da cui si ricava che W non è isotropo. Pertanto $W(\varphi) \leq \iota_-(\varphi)$.

Sia $a := \iota_+(\varphi)$ e sia $b := \iota_-(\varphi)$. Sia ora $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_a}, \underline{w_1}, \ldots, \underline{w_b}\}$ una base di Sylvester per φ. Siano $\underline{v_1}$, ..., $\underline{v_a}$ tali che $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_i}) = 1$ con $1 \leq i \leq a$. Analogamente siano $\underline{w_1}$, ..., $\underline{w_b}$ tali che $\varphi(\underline{w_i}, \underline{w_i}) = -1$ con $1 \leq i \leq b$. Detta allora $\mathcal{B}' = \{\underline{v_1}' := \underline{v_1} + \underline{w_1}, \ldots, \underline{v_b}' := \underline{v_b} + \underline{w_b}\}$, sia $W = \operatorname{Span}(\mathcal{B}')$.

Si osserva che $\mathcal{B}'$ è linearmente indipendente, e dunque che $\dim W = \iota_-$. Inoltre $\varphi(\underline{v_i}', \underline{v_j}') = \varphi(\underline{v_i} + \underline{w_i}, \underline{v_j} + \underline{w_j})$. Se $i \neq j$, allora $\varphi(\underline{v_i}', \underline{v_j}') = 0$, dal momento che i vettori di $\mathcal{B}$ sono a due a due ortogonali tra loro. Se invece $i = j$, allora $\varphi(\underline{v_i}', \underline{v_j}') = \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_i}) + \varphi(\underline{w_i}, \underline{w_i}) = 1 - 1 = 0$. Quindi $M_{\mathcal{B}'}(\varphi|_W) = 0$, da cui si conclude che $\varphi|_W = 0$. Pertanto $W(\varphi) \geq i_-(\varphi)$, e quindi si conclude che $W(\varphi) = i_-(\varphi)$, da cui la tesi. □