

Schede riassuntive di Geometria 1

Alcuni accenni alla geometria di \mathbb{R}^3

Si definisce prodotto scalare la forma bilineare simmetrica unicamente determinata da $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Vale la seguente identità: $\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = xx' + yy' + zz'$.

Inoltre $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos(\theta)$, dove θ è l'angolo compreso tra i due vettori. Due vettori $\underline{a}, \underline{b}$ si dicono ortogonali se e solo se $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = 0$.

Si definisce prodotto vettoriale la forma bilineare alternante da $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ in \mathbb{R}^3 tale che $\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3$, $\underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1$, $\underline{e}_3 \times \underline{e}_1 = \underline{e}_2$ e $\underline{e}_i \times \underline{e}_i = \underline{0}$. Dati due vettori (x, y, z) e (x', y', z') , si può determinarne il prodotto vettoriale informalmente come:

$$\begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}.$$

Vale l'identità $|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin(\theta)$, dove θ è l'angolo con cui, ruotando di θ in senso antiorario \underline{a} , si ricade su \underline{b} . Due vettori $\underline{a}, \underline{b}$ si dicono paralleli se $\exists k \mid \underline{a} = k\underline{b}$, o equivalentemente se $\underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$. Altrettanto si può dire se $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = |\underline{a}| |\underline{b}|$ (i.e. $\cos(\theta) = 1 \implies \theta = 0$).

Una retta in \mathbb{R}^3 è un sottospazio affine della forma $\underline{v} + \text{Span}(\underline{r})$. Analogamente un piano è della forma $\underline{v} + \text{Span}(\underline{x}, \underline{y})$.

Nella forma cartesiana, un piano è della forma $ax + by + cz = d$, dove (a, b, c) è detta normale del piano. Una retta è l'intersezione di due piani, e dunque è un sistema lineare di due equazioni di un piano. Due piani sono perpendicolari fra loro se e solo se le loro normali sono ortogonali. Due piani sono paralleli se e solo se le loro normali sono parallele. Il vettore \underline{r} che genera lo Span di una retta che è intersezione di due piani può essere computato come prodotto vettoriale delle normali dei due piani.

Valgono le seguenti identità:

- $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle \underline{b} - \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle \underline{c}$ (identità di Lagrange),
- $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) + \underline{b} \times (\underline{c} \times \underline{a}) + \underline{c} \times (\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{0}$ (identità di Jacobi).

Dati tre punti $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$, il volume del parallelepipedo individuato da questi punti è:

$$\left| \det \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \\ \underline{c} \end{pmatrix} \right| = |\langle \underline{a}, \underline{b} \times \underline{c} \rangle|.$$

Tre punti sono complanari se e solo se il volume di tale parallelepipedo è nullo (infatti questo è equivalente a dire che almeno uno dei tre punti si scrive come combinazione lineare degli altri due).

Proprietà generali di uno spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale V su un campo \mathbb{K} soddisfa i seguenti assiomi:

- $(V, +)$ è un gruppo abeliano,
- il prodotto esterno da $\mathbb{K} \times V$ in V è associativo rispetto agli scalari (i.e. $a(b\underline{v}) = (ab)\underline{v}$),
- $1_{\mathbb{K}} \cdot \underline{v} = \underline{v}$,
- il prodotto esterno è distributivo da ambo i lati (i.e. $(a + b)\underline{v} = a\underline{v} + b\underline{v}$ e $a(\underline{v} + \underline{w}) = a\underline{v} + a\underline{w}$).

Un insieme di vettori I si dice linearmente indipendente se una qualsiasi combinazione lineare di un suo sottinsieme finito è nulla se e solo se i coefficienti dei vettori sono tutti nulli. Si dice linearmente dipendente in caso contrario.

Un insieme di vettori G si dice generatore di V se ogni vettore di V si può scrivere come combinazione lineare di un numero finito di elementi di G , ossia se $V = \text{Span}(G)$.

Una base è un insieme contemporaneamente linearmente indipendente e generatore di V . Equivalentemente una base è un insieme generatore minimale rispetto all'inclusione e un insieme linearmente indipendente massimale, sempre rispetto all'inclusione. Ogni spazio vettoriale, anche quelli non finitamente generati, ammettono una base. La dimensione della base è unica ed è il numero di elementi dell'insieme che è base.

Dato un insieme linearmente indipendente I in uno spazio di dimensione finita, tale insieme, data una base \mathcal{B} , può essere esteso a una base T che contiene I e che è completato da elementi di \mathcal{B} .

Analogamente, dato un insieme generatore finito G , da esso si può estrarre sempre una base dello spazio.

Uno spazio vettoriale fondato su un campo infinito con un insieme di vettori infinito non è mai unione finita di sottospazi propri. Un insieme linearmente indipendente di V con esattamente $\dim V$ elementi è una base di V . Analogamente, un insieme generatore di V con esattamente $\dim V$ elementi è una base di V .

Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base ordinata dello spazio vettoriale V .

- $\{0\}$ e V sono detti sottospazi banali,
- lo Span di n vettori è il più piccolo sottospazio di V contenenti tali vettori,
- $\text{Span}(\mathcal{B}) = V$,
- $\text{Span}(\emptyset) = \{0\}$,
- dato X generatore di V , $X \setminus \{x_0\}$ genera $V \iff x_0 \in \text{Span}(X \setminus \{x_0\})$,
- $X \subseteq Y$ è un sottospazio di $Y \iff \text{Span}(X) = X$,
- $\text{Span}(X) \subseteq Y \iff X \subseteq Y$, se Y è uno spazio,
- $\text{Span}(\text{Span}(A)) = \text{Span}(A)$,
- se I è un insieme linearmente indipendente di V , allora $|I| \leq \dim V$,

- se G è un insieme generatore di V , allora $|G| \geq \dim V$,
- $[\underline{v}]_{\mathcal{B}}$ è la rappresentazione di \underline{v} nella base ordinata \mathcal{B} , ed è un vettore di \mathbb{K}^n che alla coordinata i -esima associa il coefficiente di \underline{v}_i nella combinazione lineare di \underline{v} nella base \mathcal{B} ,
- la rappresentazione nella base \mathcal{B} è sempre unica ed esiste sempre (è quindi un isomorfismo tra V e \mathbb{K}^n),
- si definisce base canonica di \mathbb{K}^n la base $e = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$, dove \underline{e}_i è un vettore con tutte le coordinate nulle, eccetto per la i -esima, che è pari ad 1 (pertanto $\dim \mathbb{K}^n = n$),
- una base naturale di $M(m, n, \mathbb{K})$ è data da $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, \dots, E_{mn}\}$, dove E_{ij} è una matrice con tutti gli elementi nulli, eccetto quello nel posto (i, j) , che è pari ad 1 (dunque $\dim M(m, n, \mathbb{K}) = mn$),
- le matrici A di taglia n tali che $A^T = A$ formano il sottospazio $\text{Sym}(n, \mathbb{K})$ di $M(n, \mathbb{K})$, detto sottospazio delle matrici simmetriche, la cui base naturale è data da $\mathcal{B}' = \{E_{ij} + E_{ji} \in \mathcal{B} \mid i < j\} \cup \{E_{ij} \in \mathcal{B} \mid i = j\}$, dove \mathcal{B} è la base naturale di $M(m, n, \mathbb{K})$ (dunque $\dim \text{Sym}(n, \mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}$),
- le matrici A di taglia n tali che $A^T = -A$ formano il sottospazio $\Lambda(n, \mathbb{K})$ di $M(n, \mathbb{K})$, detto sottospazio delle matrici antisimmetriche, la cui base naturale è data da $\mathcal{B}' = \{E_{ij} - E_{ji} \in \mathcal{B} \mid i < j\}$, dove \mathcal{B} è la base naturale di $M(m, n, \mathbb{K})$ (dunque $\dim \Lambda(n, \mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}$),
- poiché $\text{Sym}(n, \mathbb{K}) \cap \Lambda(n, \mathbb{K}) = \{0\}$ e $\dim \text{Sym}(n, \mathbb{K}) + \dim \Lambda(n, \mathbb{K}) = \dim M(n, \mathbb{K})$, vale che $M(n, \mathbb{K}) = \text{Sym}(n, \mathbb{K}) \oplus \Lambda(n, \mathbb{K})$,
- una base naturale di $\mathbb{K}[x]$ è data da $\mathcal{B} = \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, mentre una di $\mathbb{K}_t[x]$ è data da $\mathcal{B} \cap \mathbb{K}_t[x] = \{x^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \leq t\}$ (quindi $\dim \mathbb{K}[x] = \infty$ e $\dim \mathbb{K}_t[x] = t + 1$),
- una base naturale di $\mathbb{K} = 1_{\mathbb{K}} = \{1_{\mathbb{K}}\}$ (quindi $\dim \mathbb{K} = 1$),
- un sottospazio di dimensione 1 si definisce *retta*, uno di dimensione 2 *piano*, uno di dimensione 3 *spazio*, e, infine, uno di dimensione $n - 1$ un *iperpiano*,
- un iperpiano Π è sempre rappresentabile da un'equazione cartesiana nelle coordinate della rappresentazione della base (infatti ogni iperpiano è il kernel di un funzionale $f \in V^*$, e $M_{1_{\mathbb{K}}}^{\mathcal{B}}(f)[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0$ è l'equazione cartesiana; è sufficiente prendere una base di Π e completarla a base di V con un vettore \underline{t} , considerando infine $\text{Ker } \underline{t}^*$).

Applicazioni lineari, somme dirette, quozienti e prodotti diretti

Un'applicazione da V in W si dice applicazione lineare se:

- $f(\underline{v} + \underline{w}) = f(\underline{v}) + f(\underline{w})$,
- $f(\alpha \underline{v}) = \alpha f(\underline{v})$.

Si definisce $\mathcal{L}(V, W) \subseteq W^V$ come lo spazio delle applicazioni lineari da V a W . Si definisce $\text{End}(V)$ come lo spazio degli endomorfismi di V , ossia delle applicazioni lineari da V in V , dette anche operatori. Un'applicazione lineare si dice isomorfismo se è bigettiva. La composizione di funzioni è associativa.

Dato un sottospazio A di V , si definisce lo spazio quoziente V/A come l'insieme quoziente V/\sim della relazione di equivalenza $\underline{a} \sim \underline{b} \iff a - b \in A$ dotato dell'usuale somma e prodotto esterno. Si scrive $[\underline{v}]_A$ come $\underline{v} + A$ e vale che $A = \underline{0} + A$. In particolare $\underline{v} + A = A \iff \underline{v} \in A$.

Siano $f: V \rightarrow W$, $h: V \rightarrow W$, $g: W \rightarrow Z$ tre applicazioni lineari. \mathcal{B}_V e \mathcal{B}_W sono due basi rispettivamente di V e W . In particolare sia $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Si ricorda che $\text{rg}(f) = \dim \text{Im } f$. Siano e ed e^j le basi canoniche rispettivamente di \mathbb{K}^n e \mathbb{K}^m .

- $f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$,
- $\text{Ker } f = f^{-1}(\underline{0}_W)$ è un sottospazio di V ,
- $\text{Im } f = f(V)$ è un sottospazio di W ,
- $\text{Im } f = \text{Span}(f(v_1), \dots, f(v_n))$,
- f è iniettiva $\iff \text{Ker } f = \{\underline{0}\}$,
- $V/\text{Ker } f \cong \text{Im } f$ (primo teorema d'isomorfismo),
- $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim V$ (teorema del rango, o formula delle dimensioni, valido se la dimensione di V è finita),
- $g \circ f$ è un'applicazione lineare da V in Z ,
- la composizione di funzioni è associativa e distributiva da ambo i lati,
- $g \circ (\alpha f) = \alpha(g \circ f) = (\alpha g) \circ f$, se $\alpha \in \mathbb{K}$,
- $\text{Ker } f \subseteq \text{Ker}(g \circ f)$,
- $\text{Im}(g \circ f) \subseteq \text{Im } g$,
- $\dim \text{Im}(g \circ f) = \dim \text{Im } g |_{\text{Im } f} = \dim \text{Im } f - \dim \text{Ker } g |_{\text{Im } f} = \dim \text{Im } f - \dim(\text{Ker } g \cap \text{Im } f)$ (è sufficiente applicare la formula delle dimensioni sulla composizione),
- $\dim \text{Im}(g \circ f) \leq \min\{\dim \text{Im } g, \dim \text{Im } f\}$,
- $\dim \text{Ker}(g \circ f) \leq \dim \text{Ker } g + \dim \text{Ker } f$ (è sufficiente applicare la formula delle dimensioni su $(g \circ f)|_{\text{Ker}(g \circ f)}$),
- f iniettiva $\implies \dim V \leq \dim W$,
- f surgettiva $\implies \dim V \geq \dim W$,

- f isomorfismo $\implies \dim V = \dim W$,
- $g \circ f$ iniettiva $\implies f$ iniettiva,
- $g \circ f$ surgettiva $\implies g$ surgettiva,
- f surgettiva $\implies \text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g)$,
- g iniettiva $\implies \text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$,
- $M_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}(f) = ([f(v_1)]_{\mathcal{B}_W} \mid \dots \mid [f(v_n)]_{\mathcal{B}_W})$ è la matrice associata a f sulle basi $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$,
- $M_W^V(f + h) = M_W^V(f) + M_W^V(h)$,
- $M_Z^V(g \circ f) = M_Z^W(g) M_W^V(f)$,
- data $A \in M(m, n, \mathbb{K})$, sia $f_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ tale che $f_A(\underline{x}) = A\underline{x}$, allora $M_e^e(f_A) = A$,
- f è completamente determinata dai suoi valori in una qualsiasi base di V ($M_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}$ è un isomorfismo tra $\mathcal{L}(V, W)$ e $M(\dim W, \dim V, \mathbb{K})$),
- $\dim \mathcal{L}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$ (dall'isomorfismo di sopra),
- $[\]_{\mathcal{B}_W}^{-1} \circ M_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}(f) \circ [\]_{\mathcal{B}_V} = f$,
- $[f(\underline{v})]_{\mathcal{B}_W} = M_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}(f) \cdot [\underline{v}]_{\mathcal{B}_V}$,
- $\text{Im}(f) = [\]_{\mathcal{B}_W}^{-1}(\text{Im } M_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}(f))$,
- $\text{rg}(f) = \text{rg}(M_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}(f))$,
- $\text{Ker}(f) = [\]_{\mathcal{B}_V}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}(f))$,
- $\dim \text{Ker}(f) = \dim \text{Ker } M_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}(f)$.

Siano $\mathcal{B}'_V, \mathcal{B}'_W$ altre due basi rispettivamente di V e W . Allora vale il teorema del cambiamento di base:

$$M_{\mathcal{B}'_W}^{\mathcal{B}'_V}(f) = M_{\mathcal{B}'_W}^{\mathcal{B}_W}(id_W) M_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}(f) M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}'_V}(id_V).$$

Siano A e B due sottospazi di V . \mathcal{B}_A e \mathcal{B}_B sono due basi rispettivamente di A e B .

- $A + B = \{\underline{a} + \underline{b} \in V \mid \underline{a} \in A, \underline{b} \in B\}$ è un sottospazio,
- $\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$ (formula di Grassmann),
- A e B sono in somma diretta $\iff A \cap B = \{\underline{0}\} \iff$ ogni elemento di $A + B$ si scrive in modo unico come somma di $\underline{a} \in A$ e $\underline{b} \in B \iff \dim(A + B) = \dim A + \dim B$ (in tal caso si scrive $A + B = A \oplus B$),
- $\dim V/A = \dim V - \dim A$ (è sufficiente applicare il teorema del rango alla proiezione al quoziente),
- $\dim V \times W = \dim V + \dim W$
($\mathcal{B}_V \times \{\underline{0}_W\} \cup \{\underline{0}_V\} \times \mathcal{B}_W$ è una base di $V \times W$).

Si definisce *immersione* da V in $V \times W$ l'applicazione lineare i_V tale che $i_V(\underline{v}) = (\underline{v}, \underline{0})$. Si definisce *proiezione* da $V \times W$ in V l'applicazione lineare p_V tale che $p_V(\underline{v}, \underline{w}) = \underline{v}$. Analogamente si può fare con gli altri spazi del prodotto cartesiano.

Si dice che B è un supplementare di A se $V = A \oplus B \iff \dim A + \dim B = \dim V \wedge A \cap B = \{\underline{0}\}$. Il supplementare non è per forza unico. Per trovare un supplementare di A è sufficiente completare \mathcal{B}_A ad una base \mathcal{B} di V e considerare $\text{Span}(\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_A)$.

Proprietà generali delle matrici

Si dice che una matrice $A \in M(n, \mathbb{K})$ è singolare se $\det(A) = 0$, o equivalentemente se non è invertibile. Compatibilmente, si dice che una matrice $A \in M(n, \mathbb{K})$ è non singolare se $\det(A) \neq 0$, ossia se A è invertibile.

Si definisce la matrice trasposta di $A \in M(m, n, \mathbb{K})$, detta A^\top , in modo tale che $A_{ij} = A_{ji}^\top$.

- $(AB)^\top = B^\top A^\top$,
- $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$,
- $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$,
- $(A^\top)^\top = A$,
- se A è invertibile, $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$,
- $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} AE + BG & AF + BH \\ \hline CE + DG & CF + DH \end{array} \right)$.

Siano $A \in M(m, n, \mathbb{K})$ e $B \in M(n, m, \mathbb{K})$.

Si definisce $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ come il gruppo delle matrici di taglia n invertibili sulla moltiplicazione matriciale. Si definisce triangolare superiore una matrice i cui elementi al di sotto della diagonale sono nulli, mentre si definisce triangolare inferiore una matrice i cui elementi nulli sono quelli al di sopra della diagonale.

Si definiscono

$$Z(M(n, \mathbb{K})) = \{A \in M(n, \mathbb{K}) \mid AB = BA \forall B \in M(n, \mathbb{K})\},$$

ossia l'insieme delle matrici che commutano con tutte le altre matrici, e

$$Z_{\text{GL}}(M(n, \mathbb{K})) = \{A \in M(n, \mathbb{K}) \mid AB = BA \forall B \in \text{GL}(n, \mathbb{K})\},$$

ovvero l'insieme delle matrici che commutano con tutte le matrici di $\text{GL}(n, \mathbb{K})$.

Si definisce $\text{tr} \in M(m, \mathbb{K})^*$ come il funzionale che associa ad ogni matrice la somma degli elementi sulla sua diagonale.

- $\text{tr}(A^\top) = \text{tr}(A)$,
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$,
- $Z(M(n, \mathbb{K})) = \text{Span}(I_n)$,
- $Z_{\text{GL}}(M(n, \mathbb{K})) = \text{Span}(I_n)$.

Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$. Sia $C_A \in \text{End}(M(n, \mathbb{K}))$ definito in modo tale che $C_A(B) = AB - BA$. Allora $\text{Ker } C_A = M(n, \mathbb{K}) \iff A \in \text{Span}(I_n)$. Siano I un insieme di n^2 indici distinti, allora l'insieme

$$T = \{A^i \mid i \in I\}$$

è linearmente dipendente (è sufficiente notare che se così non fosse, se $A \notin \text{Span}(I_n)$, tale T sarebbe base di $M(n, \mathbb{K})$, ma così $\text{Ker } C_A = M(n, \mathbb{K}) \implies A \in \text{Span}(I_n)$, ξ , e che se $A \in \text{Span}(I_n)$, T è chiaramente linearmente dipendente).

In generale esiste sempre un polinomio $p(X) \in \mathbb{K}[x]$ di grado n tale per cui $p(A) = 0$, dove un tale polinomio è per esempio il polinomio caratteristico di p , ossia $p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ (teorema di Hamilton-Cayley).

Rango di una matrice

Si definisce rango di una matrice A il numero di colonne linearmente indipendenti di A . Siano $A, B \in M(m, n, \mathbb{K})$.

- $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^\top)$ (i.e. il rango è lo stesso se calcolato sulle righe invece che sulle colonne),
- $\text{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$ (come conseguenza dell'affermazione precedente),
- $\text{rg}(A+B) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B) \iff \text{Im}(A+B) \subseteq \text{Im}(A) + \text{Im}(B)$,
- $\text{rg}(A+B) = \text{rg}(A) + \text{rg}(B) \implies \text{Im}(A+B) = \text{Im}(A) \oplus \text{Im}(B)$ (è sufficiente applicare la formula di Grassmann),
- $\text{rg}(A)$ è il minimo numero di matrici di rango uno che sommate restituiscono A (è sufficiente usare la proposizione precedente per dimostrare che devono essere almeno $\text{rg}(A)$),
- $\text{rg}(A) = 1 \implies \exists B \in M(m, 1, \mathbb{K}), C \in M(1, n, \mathbb{K}) \mid A = BC$ (infatti A può scriversi come $([c|c|c|\alpha_1 A^i \ \dots \ \alpha_n A^i])$ per un certo $i \leq n$ tale che $A^i \neq 0$).

Siano $A \in M(m, n, \mathbb{K}), B \in M(n, k, \mathbb{K})$ e $C \in M(k, t, \mathbb{K})$.

- $\text{rg}(AB) \geq \text{rg}(A) + \text{rg}(B) - n$ (disuguaglianza di Sylvester - è sufficiente usare la formula delle dimensioni ristretta alla composizione $f_A \circ f_B$),
- $\text{rg}(ABC) \geq \text{rg}(AB) + \text{rg}(BC) - \text{rg}(B)$ (disuguaglianza di Frobenius, di cui la proposizione precedente è un caso particolare con $B = I_n$ e $k = n$),
- $\text{rg}(AB) = \text{rg}(B) \iff \text{Ker } A = \{0\}$ (è sufficiente usare la formula delle dimensioni ristretta alla composizione $f_A \circ f_B$),
- $\text{rg}(AB) = \text{rg}(A) \iff f_B$ surgettiva (come sopra).

Sia $A \in M(n, \mathbb{K})$.

- se A è antisimmetrica e il campo su cui si fonda lo spazio vettoriale non ha caratteristica 2, allora $\text{rg}(A)$ è pari,
- $\text{rg}(A) = n \iff \dim \text{Ker } A = 0 \iff \det(A) \neq 0 \iff A$ è invertibile,

Sistemi lineari, algoritmo di eliminazione di Gauss ed SD-equivalenza

Un sistema lineare di m equazioni in n variabili può essere rappresentato nella forma $A\underline{x} = B$, dove $A \in M(m, n, \mathbb{K}), \underline{x} \in \mathbb{K}^n$ e $B \in \mathbb{K}^m$. Un sistema lineare si dice omogeneo se $B = 0$. In tal caso l'insieme delle soluzioni del sistema coincide con $\text{Ker } A = \text{Ker } f_A$, dove $f_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ è l'applicazione lineare indotta dalla matrice A . Le soluzioni di un sistema lineare sono raccolte nel sottospazio affine $\underline{s} + \text{Ker } A$, dove \underline{s} è una qualsiasi soluzione del sistema completo.

- $A\underline{x} = B$ ammette soluzione se e solo se $B \in \text{Span}(A^1, \dots, A^n) \iff \text{Span}(A^1, \dots, A^n, B) = \text{Span}(A^1, \dots, A^n) \iff \dim \text{Span}(A^1, \dots, A^n, B) = \dim \text{Span}(A^1, \dots, A^n) \iff \dim \text{Im}(A \mid B) = \dim \text{Im } A \iff \text{rg}(A \mid B) = \text{rg}(A)$ (teorema di Rouché-Capelli),
- $A\underline{x} = B$, se la ammette, ha un'unica soluzione se e solo se $\text{Ker } A = \{0\} \iff \text{rg } A = n$.

Si definiscono tre operazioni sulle righe di una matrice A :

- l'operazione di scambio di riga,
- l'operazione di moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo,
- la somma di un multiplo non nullo di una riga ad un'altra riga distinta.

Queste operazioni non variano né $\text{Ker } A$ né $\text{rg}(A)$. Si possono effettuare le stesse medesime operazioni sulle colonne (variando tuttavia $\text{Ker } A$, ma lasciando invariato $\text{Im } A$ - e quindi $\text{rg}(A)$). L'algoritmo di eliminazione di Gauss procede nel seguente modo:

- se A ha una riga, l'algoritmo termina;
- altrimenti si prenda la prima riga di A con il primo elemento non nullo e la si scambi con la prima riga di A (in caso non esista, si proceda all'ultimo passo),
- per ogni riga di A con primo elemento non nullo, esclusa la prima, si sottragga un multiplo della prima riga in modo tale che la riga risultante abbia il primo elemento nullo,
- si ripeta l'algoritmo considerando come matrice A la matrice risultante dall'algoritmo senza la prima riga e la prima colonna (in caso tale matrice non possa esistere, l'algoritmo termina).

Si definiscono *pivot* di una matrice l'insieme dei primi elementi non nulli di ogni riga della matrice. Il rango della matrice iniziale A è pari al numero di *pivot* della matrice risultante dall'algoritmo di eliminazione di Gauss. Una matrice che processata dall'algoritmo di eliminazione di Gauss restituisce sé stessa è detta matrice a scala.

Agendo solo attraverso operazioni per riga, l'algoritmo di eliminazione di Gauss non modifica $\text{Ker } A$ (si può tuttavia integrare l'algoritmo con le operazioni per colonna, perdendo quest'ultimo beneficio).

Agendo su una matrice a scala con operazioni per riga considerando la matrice riflessa (ossia dove l'elemento $(1, 1)$ e (m, n) sono scambiati), si può ottenere una matrice a scala ridotta, ossia una matrice dove tutti i pivot sono 1 e dove tutti gli elementi sulle colonne dei pivot, eccetto i pivot stessi, sono nulli.

Si definisce:

$$I_r^{m \times n} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in M(m, n, \mathbb{K}).$$

Per ogni applicazione lineare $f : V \rightarrow W$, con $\dim V = n$ e $\dim W = m$ esistono due basi $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ rispettivamente di V e W tale che $M_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}(f) = I_r^{m \times n}$, dove $r = \text{rg}(f)$ (è sufficiente completare con I a base di V una base di $\text{Ker } f$ e poi prendere come base di W il completamento di $f(I)$ su una base di W).

Si definisce SD-equivalenza la relazione d'equivalenza su $M(m, n, \mathbb{K})$ indotta dalla relazione $A \sim_{SD} B \iff \exists P \in \text{GL}(m, \mathbb{K}), Q \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) \mid A = PBQ$. L'invariante completo della SD-equivalenza è il rango: $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) \iff A \sim_{SD} B$ (infatti $\text{rg}(A) = r \iff A \sim_{SD} I_r^{m \times n}$ - è sufficiente applicare il cambio di base e sfruttare il fatto che esistono sicuramente due basi per cui f_A ha $I_r^{m \times n}$ come matrice associata).

Poiché $I_r^{m \times n}$ ha sempre rango r , l'insieme quoziente della SD-equivalenza su $M(m, n, \mathbb{K})$ è il seguente:

$$M(m, n, \mathbb{K}) / \sim_{SD} = \left\{ [0], [I_1^{m \times n}], \dots, [I_{\min\{m, n\}}^{m \times n}] \right\},$$

contenente esattamente $\min\{m, n\}$ elementi. L'unico elemento di $[0]$ è 0 stesso.

La regola di Cramer

Qualora $m = n$ e A fosse invertibile (i.e. $\det(A) \neq 0$), per calcolare il valore di \underline{x} si può applicare la regola di Cramer.

Si definisce:

$$A_i^* = ([c|c|c|c|A^1 \ \dots \ A^i \rightarrow B \ \dots \ A^n]),$$

dove si sostituisce alla i -esima colonna di A il vettore B . Allora vale la seguente relazione:

$$\underline{x} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det(A_1^*) \\ \vdots \\ \det(A_n^*) \end{pmatrix}.$$

L'inverso (generalizzato e non) di una matrice

Si definisce matrice dei cofattori di una matrice $A \in M(n, \mathbb{K})$ la seguente matrice:

$$\text{Cof } A = \begin{pmatrix} \text{Cof}_{1,1}(A) & \dots & \text{Cof}_{1,n}(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cof}_{n,1}(A) & \dots & \text{Cof}_{n,n}(A) \end{pmatrix},$$

dove, detta $A_{i,j}$ il minore di A ottenuto eliminando la i -esima riga e la j -esima colonna, si definisce il cofattore (o complemento algebrico) nel seguente modo:

$$\text{Cof}_{i,j}(A) = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}).$$

Si definisce inoltre l'aggiunta classica:

$$\text{adj}(A) = (\text{Cof } A)^\top.$$

Allora, se A ammette un inverso (i.e. se $\det(A) \neq 0$), vale la seguente relazione:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A).$$

Quindi, per esempio, A^{-1} è a coefficienti interi $\iff \det(A) = \pm 1$.

Siano $A, B \in M(n, \mathbb{K})$.

- $\text{adj}(AB) = \text{adj}(B) \text{adj}(A)$,
- $\text{adj}(A^\top) = \text{adj}(A)^\top$.

Si definisce inverso generalizzato di una matrice $A \in M(m, n, \mathbb{K})$ una matrice $X \in M(n, m, \mathbb{K})$ | $AXA = A$. Ogni matrice ammette un inverso generalizzato (è sufficiente considerare gli inversi generalizzati di $I_r^{m \times n}$ e la SD-equivalenza di A con $I_r^{m \times n}$, dove $\text{rg}(A) = r$). Se $m = n$ ed A è invertibile, allora A^{-1} è l'unico inverso generalizzato di A . Gli inversi generalizzati di $I_r^{m \times n}$ sono della forma:

$$X = \left(\begin{array}{c|c} I_r & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \in M(m, n, \mathbb{K}).$$

Endomorfismi e similitudine

Si definisce la similitudine tra matrici su $M(n, \mathbb{K})$ come la relazione di equivalenza determinata da $A \sim B \iff \exists P \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) \mid A = PBP^{-1}$. $A \sim B \implies \text{rg}(A) = \text{rg}(B)$, $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$, $\det(A) = \det(B)$, $P_\lambda(A) = P_\lambda(B)$ (invarianti *non completi* della similitudine). Vale inoltre che $A \sim B \iff A$ e B hanno la stessa forma

canonica di Jordan, a meno di permutazioni dei blocchi di Jordan (invariante *completo* della similitudine). La matrice identità è l'unica matrice identica a sé stessa.

Sia $p \in \text{End}(V)$. Si dice che un endomorfismo è un automorfismo se è un isomorfismo. Siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ due qualsiasi basi di V .

- p automorfismo $\iff p$ iniettivo $\iff p$ surgettivo (è sufficiente applicare la formula delle dimensioni),
- $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(id_V) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id_V) = I_n$ (dunque entrambe le matrici sono invertibili e sono l'una l'inverso dell'altra),
- se p è un automorfismo, $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(p^{-1}) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(p)^{-1}$,
- $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(p) = \underbrace{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(id_V)}_P M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(p) \underbrace{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id_V)}_{P^{-1}}$ (ossia $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(p) \sim M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(p)$).

$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(id_V) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id_V) = I_n$. Dunque entrambe le matrici sono invertibili. Inoltre $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(id_V) = I_n$.

Duale, biduale e annullatore

Si definisce duale di uno spazio vettoriale V lo spazio $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$, i cui elementi sono detti funzionali. Analogamente il biduale è il duale del duale di V : $V^{**} = (V^*)^* = \mathcal{L}(V^*, \mathbb{K})$.

Sia data una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ di uno spazio vettoriale V di dimensione n . Allora $\dim V^* = \dim \mathcal{L}(V, \mathbb{K}) = \dim V \cdot \dim \mathbb{K} = \dim V$. Si definisce il funzionale \underline{v}_i^* come l'applicazione lineare univocamente determinata dalla relazione:

$$\underline{v}_i^*(\underline{v}_j) = \delta_{ij}.$$

Sia $\mathcal{B}^* = \{\underline{v}_1^*, \dots, \underline{v}_n^*\}$. Allora \mathcal{B}^* è una base di V^* . Poiché V e V^* hanno la stessa dimensione, tali spazi sono isomorfi, sebbene non canonicamente. Ciononostante, V e V^{**} sono canonicamente isomorfi tramite l'isomorfismo:

$$\varphi^{**}: V \rightarrow V^{**}, \underline{v} \mapsto \text{val}|_{V^*},$$

che associa ad ogni vettore \underline{v} la funzione di valutazione in una funzionale in \underline{v} , ossia:

$$\text{val}|_{V^*}: V^* \rightarrow \mathbb{K}, f \mapsto f(\underline{v}).$$

Sia $U \subseteq V$ un sottospazio di V . Si definisce il sottospazio di $\mathcal{L}(V, W)$:

$$\text{Ann}_{\mathcal{L}(V, W)}(U) = \{f \in \mathcal{L}(V, W) \mid f(U) = \{0\}\}.$$

Se V è a dimensione finita, la dimensione di $\text{Ann}(U)$ è pari a $(\dim V - \dim U) \cdot \dim W$ (è sufficiente prendere una base di U , completarla a base di V e notare che $f(U) = \{0\} \iff$ ogni valutazione in f degli elementi della base di U è nullo \iff la

matrice associata di f ha tutte colonne nulle in corrispondenza degli elementi della base di U).

Si scrive semplicemente $\text{Ann}(U)$ quando $W = \mathbb{K}$ (ossia quando le funzioni sono funzionali di V). In tal caso $\dim \text{Ann}(U) = \dim V - \dim U$.

- $\varphi^{**}(U) \subseteq \text{Ann}(\text{Ann}(U))$,
- se V è a dimensione finita, $\varphi^{**}(U) = U^{**} = \text{Ann}(\text{Ann}(U))$ (è sufficiente applicare la formula delle dimensioni $\varphi^{**}|_U$ e notare l'uguaglianza tra le due dimensioni),
- se V è a dimensione finita e W è un altro sottospazio di V , $U = W \iff \text{Ann}(U) = \text{Ann}(W)$ (è sufficiente considerare $\text{Ann}(\text{Ann}(U)) = \text{Ann}(\text{Ann}(W))$ e applicare la proposizione precedente, ricordandosi che φ^{**} è un isomorfismo, ed è dunque iniettivo).

Si definisce l'applicazione trasposta $^\top$ da $\mathcal{L}(V, W)$ a $\mathcal{L}(W^*, V^*)$ in modo tale che $f^\top(g) = g \circ f \in V^*$. Siano $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ e sia $h \in \mathcal{L}(W, Z)$.

- $(f + g)^\top = f^\top + g^\top$,
- $(\lambda f)^\top = \lambda f^\top$,
- se f è invertibile, $(f^{-1})^\top = (f^\top)^{-1}$,
- $(h \circ f)^\top = f^\top \circ h^\top$.

Siano $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ due basi rispettivamente di V e di W . Allora vale la seguente relazione:

$$M_{\mathcal{B}_V^*}^{\mathcal{B}_W^*}(f^\top) = M_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_V}(f)^\top.$$

Applicazioni multilineari

Sia $f: V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ un'applicazione, dove V_i è uno spazio vettoriale $\forall i \leq n$, così come W . Tale applicazione si dice n -lineare ed appartiene allo spazio $\text{Mult}(V_1 \times \dots \times V_n, W)$, se è lineare in ogni sua coordinata, ossia se:

- $f(x_1, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)$,
- $f(x_1, \dots, \alpha x_i, \dots, x_n) = \alpha f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$.

Sia $W = \mathbb{K}$, e siano tutti gli spazi V_i fondati su tale campo: allora $\text{Mult}(V_1 \times \dots \times V_n, \mathbb{K})$ si scrive anche come $V_1^* \otimes \dots \otimes V_n^*$, e tale spazio è detto prodotto tensoriale tra V_1, \dots, V_n . Sia V_i di dimensione finita $\forall i \leq n$. Siano $\mathcal{B}_{V_i} = \{\underline{v}_1^{(i)}, \dots, \underline{v}_{k_i}^{(i)}\}$ base di V_i , dove $k_i = \dim V_i$. Si definisce l'applicazione n -lineare $\underline{v}_{j_1}^{(1)*} \otimes \dots \otimes \underline{v}_{j_n}^{(n)*} \in \text{Mult}(V_1 \times \dots \times V_n, \mathbb{K})$ univocamente determinata dalla relazione:

$$\underline{v}_{j_1}^{(1)*} \otimes \dots \otimes \underline{v}_{j_n}^{(n)*}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n) = \underline{v}_{j_1}^{(1)*}(\underline{w}_1) \dots \underline{v}_{j_n}^{(n)*}(\underline{w}_n).$$

Si definisce l'insieme \mathcal{B}_\otimes nel seguente modo:

$$\mathcal{B}_\otimes = \left\{ \underline{v}_{j_1}^{(1)*} \otimes \cdots \otimes \underline{v}_{j_n}^{(n)*} \mid 1 \leq j_1 \leq k_1, \dots, 1 \leq j_n \leq k_n \right\}.$$

Poiché ogni applicazione n -lineare è univocamente determinata dai valori che assume ogni combinazione degli elementi delle basi degli spazi V_i , vi è un isomorfismo tra $\text{Mult}(V_1 \times \dots \times V_n, \mathbb{K})$ e $\mathbb{K}^{\mathcal{B}_{V_1} \times \dots \times \mathcal{B}_{V_n}}$, che ha dimensione $\prod_{i=1}^n k_i = k$. Pertanto anche $\dim \text{Mult}(V_1 \times \dots \times V_n, \mathbb{K}) = k$. Poiché \mathcal{B}_\otimes genera $\text{Mult}(V_1 \times \dots \times V_n, \mathbb{K})$ e i suoi elementi sono tanti quanto è la dimensione dello spazio, tale insieme è una base di $\text{Mult}(V_1 \times \dots \times V_n, \mathbb{K})$.

Se $V_i = V_1 = V \forall i \leq n$, si dice che $\text{Mult}(V^n, \mathbb{K})$ è lo spazio delle forme n -lineari di V .

Applicazioni multilineari simmetriche

Sia V uno spazio di dimensione n . Una forma k -lineare f si dice simmetrica ed appartiene allo spazio $\text{Sym}^k(V)$ se:

$$f(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k) = f(\underline{x}_{\sigma(1)}, \dots, \underline{x}_{\sigma(k)}), \quad \forall \sigma \in S_k.$$

Poiché ogni applicazione n -lineare simmetrica è univocamente determinata dai valori che assume negli elementi della base disposti in modo non decrescente, $\dim \text{Sym}^k(V) = \binom{n+k-1}{k}$.

Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di V . Dato un insieme di indici non decrescente I , si definisce il prodotto simmetrico (o *prodotto vee*) $\underline{v}_{i_1}^* \vee \cdots \vee \underline{v}_{i_k}^*$ tra elementi della base come la forma k -lineare simmetrica determinata dalla relazione:

$$\underline{v}_{i_1}^* \vee \cdots \vee \underline{v}_{i_k}^* = \sum_{\sigma \in S_k} \underline{v}_{i_{\sigma(1)}}^* \otimes \cdots \otimes \underline{v}_{i_{\sigma(k)}}^*.$$

Si definisce l'insieme:

$$\mathcal{B}_{\text{Sym}} = \left\{ \underline{v}_{i_1}^* \vee \cdots \vee \underline{v}_{i_k}^* \mid 1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n \right\}.$$

L'insieme \mathcal{B}_{Sym} è sia generatore che linearmente indipendente su $\text{Sym}^k(V)$, ed è dunque base. Allora $\dim \text{Sym}^k(V) = \binom{n+k-1}{k}$.

Applicazioni multilineari alternanti

Sia V uno spazio di dimensione n . Una forma k -lineare f si dice alternante (o antisimmetrica) ed appartiene allo spazio $\Lambda^k(V)$ (talvolta scritto come $\text{Alt}^k(V)$) se:

$$f(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k) = 0 \iff \exists i, j \leq k \mid x_i = x_j.$$

Questo implica che:

$$f(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k) = \text{sgn}(\sigma) f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \quad \forall \sigma \in S_k$$

Se $k > n$, un argomento della base di V si ripete sempre nel computo f negli elementi della base, e quindi ogni alternante è pari a 0, ossia $\dim \Lambda^k(V) = 0$.

Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di V . Dato un insieme di indici crescente I , si definisce il prodotto esterno (o *prodotto wedge*) $\underline{v}_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge \underline{v}_{i_k}^*$ tra elementi della base come la forma k -lineare alternante determinata dalla relazione:

$$\underline{v}_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge \underline{v}_{i_k}^* = \sum_{\sigma \in S_k} \text{sgn}(\sigma) \underline{v}_{i_{\sigma(1)}}^* \otimes \cdots \otimes \underline{v}_{i_{\sigma(k)}}^*.$$

Si definisce l'insieme:

$$\mathcal{B}_\Lambda = \left\{ \underline{v}_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge \underline{v}_{i_k}^* \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n \right\}.$$

L'insieme \mathcal{B}_Λ è sia generatore che linearmente indipendente su $\Lambda^k(V)$, ed è dunque base. Allora $\dim \Lambda^k(V) = \binom{n}{k}$. Riassumendo si può scrivere:

$$\dim \Lambda^k(V) = \begin{cases} 0 & \text{se } k > n, \\ \binom{n}{k} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Quindi è quasi sempre vero che:

$$\underbrace{\dim \text{Sym}^k(V)}_{= \binom{n+k-1}{k}} + \underbrace{\dim \Lambda^k(V)}_{\leq \binom{n}{k}} < \underbrace{\dim \text{Mult}(V^k, \mathbb{K})}_{= n^k},$$

e dunque che $\text{Sym}^k(V) + \Lambda^k(V) \neq \text{Mult}(V^k, \mathbb{K})$.

Determinante di una matrice

Si definisce il determinante \det di una matrice di taglia $n \times n$ come l'unica forma n -lineare alternante di $(\mathbb{K}^n)^n$ tale che $\det(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) = 1$ (infatti $\dim \Lambda^n(V) = \binom{n}{n} = 1$, e quindi ogni forma alternante è multipla delle altre, eccetto per lo zero).

Equivalentemente $\det = \underline{e}_1^* \wedge \cdots \wedge \underline{e}_n^*$.

Siano $A, B \in M(n, \mathbb{K})$. Si scrive $\det(A)$ per indicare $\det(A_1, \dots, A_n)$. Vale pertanto la seguente relazione:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

- $\det(I_n) = 1$,
- $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$,
- $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$,
- $\det(A) \neq 0 \iff A$ invertibile (ossia non singolare),
- $\det(\lambda A) = \lambda^n A$,
- $\det(A) = \det(A^\top)$ (è sufficiente applicare la definizione di \det e manipolare algebricamente il risultato per evidenziare l'uguaglianza),

- se A è antisimmetrica, n è dispari e $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$, $\det(A) = \det(-A^\top) = (-1)^n \det(A^\top) = (-1)^n \det(A) = -\det(A) \implies \det(A) = 0$ (quindi ogni matrice antisimmetrica di taglia dispari non è invertibile),
- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ (*teorema di Binet* – è sufficiente considerare la forma $\frac{\det(AB)}{\det(B)}$ in funzione delle righe di A e determinare che tale forma è alternante e che vale 1 nell'identità, e che, per l'unicità del determinante, deve obbligatoriamente essere pari a $\det(A)$),
- se A è invertibile, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$,
- $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \det(\lambda_1 \underline{e}_1, \dots, \lambda_n \underline{e}_n) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$,
- se A è triangolare superiore (o inferiore), allora $\det(A)$ è il prodotto degli elementi sulla sua diagonale principale,
- $\det(A_1, \dots, A_n) = \text{sgn}(\sigma) \det(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(n)})$, $\forall \sigma \in S_n$ (infatti \det è alternante),
- $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$, se C e D commutano e D è invertibile,
- $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C)$,
- se A è nilpotente (ossia se $\exists k \mid A^k = 0$), $\det(A) = 0$,
- se A è idempotente (ossia se $A^2 = A$), allora $\det(A) = 1$ o $\det(A) = 0$,
- se A è ortogonale (ossia se $AA^\top = I_n$), allora $\det(A) = \pm 1$,
- se A è un'involuzione (ossia se $A^2 = I_n$), allora $\det(A) = \pm 1$,

Le operazioni del terzo tipo dell'algoritmo di eliminazione di Gauss (ossia l'aggiunta a una riga di un multiplo di un'altra riga – a patto che le due righe siano distinte) non alterano il determinante della matrice iniziale, mentre lo scambio di righe ne inverte il segno (corrisponde a una trasposizione di S_n). L'operazione del secondo tipo (la moltiplicazione di una riga per uno scalare) altera il determinante moltiplicandolo per tale scalare.

Inoltre, se D è invertibile, vale la seguente scomposizione:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & BD^{-1} \\ 0 & I_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ D^{-1}C & I_k \end{pmatrix},$$

dove $k \times k$ è la taglia di A . Pertanto vale la seguente relazione, sempre se D è invertibile:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A - BD^{-1}C) \det(D).$$

È possibile computare il determinante di A , scelta la riga i , mediante lo sviluppo di Laplace:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \operatorname{Cof}_{i,j}(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{i,j}).$$

Si definisce matrice di Vandermonde una matrice $A \in M(n, \mathbb{K})$ della forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Vale allora che:

$$\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i),$$

verificabile notando che $\det(A)$ è di grado $\frac{n(n-1)}{2}$ e che ponendo $x_i = x_j$ per una coppia (i, j) , tale matrice ha due righe uguali, e quindi determinante nullo

$$\implies (x_j - x_i) \mid \det(A) \stackrel{\text{UFD}}{\implies} \det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Pertanto una matrice di Vandermonde è invertibile se e solo se la sua seconda colonna contiene tutti scalari distinti nelle coordinate. Tale matrice risulta utile nello studio dell'interpolazione di Lagrange (ossia nella dimostrazione dell'unicità del polinomio di $n-1$ grado tale che $p(\alpha_i) = \beta_i$ per i coppie (α_i, β_i) con α_i tutti distinti).

Autovalori e diagonalizzabilità

Sia $f \in \operatorname{End}(V)$. Si dice che $\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore di f se e solo se $\exists \underline{v} \neq \underline{0}, \underline{v} \in V$ tale che $f(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$, e in tal caso si dice che \underline{v} è un autovettore relativo a λ . Un autovalore è tale se esiste una soluzione non nulla a $(f - \lambda \operatorname{Id}_V)\underline{v} = \underline{0}$, ossia se e solo se:

$$\det(f - \lambda \operatorname{Id}_V) = 0.$$

Questa relazione è ben definita dacché il determinante è invariante per qualsiasi cambio di base applicato ad una matrice associata di f . Si definisce allora $p_f(\lambda) = \det(f - \lambda \operatorname{Id}_V)$, detto polinomio caratteristico di f , ancora invariante per matrici associate a f . Si denota inoltre con spettro di f l'insieme $sp(f)$ degli autovalori di f e con $V_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_V)$ lo spazio degli autovettori relativo a λ , detto autospazio di λ .

Si definisce la molteplicità algebrica $\mu_{a,f}(\lambda)$ di un autovalore λ come la molteplicità che assume come radice del polinomio $p_f(\lambda)$. Si definisce la molteplicità geometrica $\mu_{g,f}(\lambda)$ di un autovalore λ come la dimensione del suo autospazio V_λ . Quando è noto l'endomorfismo che si sta considerando si omette la dicitura f nel pedice delle molteplicità.

- $p_f(\lambda)$ ha sempre grado $n = \dim V$,
- $p_f(\lambda)$ è sempre monico a meno del segno,
- il coefficiente di λ^n è sempre $(-1)^n$,
- il coefficiente di λ^{n-1} è $(-1)^{n+1} \operatorname{tr}(f)$,
- il termine noto di $p_f(\lambda)$ è $\det(f - 0 \cdot \operatorname{Id}_V) = \det(f)$,
- poiché $p_f(\lambda)$ appartiene all'anello euclideo $\mathbb{K}[\lambda]$, che è dunque un UFD, esso ammette al più n radici,
- $sp(f)$ ha al più n elementi, ossia esistono al massimo n autovalori (dalla precedente considerazione),
- se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $p_f \in \mathbb{R}[\lambda]$, $\lambda \in sp(f) \iff \bar{\lambda} \in sp(f)$ (infatti λ è soluzione di p_f , e quindi anche $\bar{\lambda}$ deve esserne radice, dacché i coefficienti di p_f sono in \mathbb{R}),
- se \mathbb{K} è un campo algebricamente chiuso, $p_f(\lambda)$ ammette sempre almeno un autovalore distinto (o esattamente n se contati con molteplicità),
- $0 \in sp(f) \iff \dim \operatorname{Ker} f > 0 \iff \operatorname{rg} f < 0 \iff \det(f) = 0$,
- autovettori relativi ad autovalori distinti sono sempre linearmente indipendenti,
- dati $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalori di f , gli spazi $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$ sono sempre in somma diretta,
- $\sum_{i=1}^k \mu_a(\lambda_i)$ corrisponde al numero di fattori lineari di $p_f(\lambda)$,
- $\sum_{i=1}^k \mu_a(\lambda_i) = n \iff p_f(\lambda)$ è completamente fattorizzabile in $\mathbb{K}[\lambda]$,
- vale sempre la disuguaglianza $n \geq \mu_a(\lambda) \geq \mu_g(\lambda) \geq 1$ (è sufficiente considerare una base di V_λ estesa a base di V e calcolarne il polinomio caratteristico sfruttando i blocchi della matrice associata, notando che $\mu_g(\lambda)$ deve forzatamente essere minore di $\mu_a(\lambda)$),
- vale sempre la disuguaglianza $n \geq \sum_{i=1}^k \mu_a(\lambda_i) \geq \sum_{i=1}^k \mu_g(\lambda_i)$,
- se $W \subseteq V$ è un sottospazio f -invariante, allora $p_{f|_W}(\lambda) \mid p_f(\lambda)$ ¹ (è sufficiente prendere una base di W ed estenderla a base di V , considerando poi la matrice associata in tale base, che è a blocchi),
- se $W \subseteq V$ è un sottospazio f -invariante, ed estesa una base \mathcal{B}_W di W ad una \mathcal{B} di V , detto $U = \operatorname{Span}(\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_W)$ il supplementare di W che si ottiene da tale base \mathcal{B} , vale che $p_f = p_{f|_W}(\lambda) \cdot p_{\hat{f}}$, dove $\hat{f}: V/W \rightarrow V/W$ è tale che $\hat{f}(\underline{u} + W) = f(\underline{u}) + W$ (come prima, è sufficiente considerare una matrice a blocchi),
- se $V = W \oplus U$, dove sia W che U sono f -invarianti, allora $p_f = p_{f|_W}(\lambda) \cdot p_{f|_U}(\lambda)$ (la matrice associata in un'unione di basi di W e U è infatti diagonale a blocchi).

Si dice che f è diagonalizzabile se V ammette una base per cui la matrice associata di f è diagonale, o equivalentemente se, dati $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalori di f , si verifica che:

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}.$$

Ancora in modo equivalente si può dire che f è diagonalizzabile se e solo se:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k \mu_a(\lambda_i) = n, \\ \mu_g(\lambda_i) = \mu_a(\lambda_i) \quad \forall 1 \leq i \leq k, \end{cases}$$

ossia se il polinomio caratteristico è completamente fattorizzabile in $\mathbb{K}[\lambda]$ (se non lo fosse, la somma diretta $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$ avrebbe forzatamente dimensione minore di V , ed esisterebbero altri autovalori in un qualsiasi campo di spezzamento di $p_f(\lambda)$) e se $\sum_{i=1}^k \mu_g(\lambda_i) = n$. Tale condizione, in un campo algebricamente chiuso, si riduce a $\mu_g(\lambda_i) = \mu_a(\lambda_i), \forall 1 \leq i \leq k$.

Considerando la forma canonica di Jordan di f , si osserva anche che f è diagonalizzabile se e solo se per ogni autovalore la massima taglia di un blocco di Jordan è esattamente 1, ossia se il polinomio minimo di f è un prodotto di fattori lineari distinti.

Data f diagonalizzabile, la matrice diagonale J a cui f è associata è, dati gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, una matrice diagonale dove λ_i compare sulla diagonale esattamente $\mu_g(\lambda_i)$ volte.

Data $A \in M(n, \mathbb{K})$, A è diagonalizzabile se e solo se f_A , l'applicazione indotta dalla matrice A , è diagonalizzabile, ossia se A è simile ad una matrice diagonale J , computabile come prima. Si scrive in particolare $p_A(\lambda)$ per indicare $p_{f_A}(\lambda)$.

Una matrice $P \in \operatorname{GL}(M(n, \mathbb{K}))$ tale che $A = PJP^{-1}$, è tale che $AP = P \cdot J$: presa la i -esima colonna, allora, $AP^{(i)} = PJ^{(i)} = P^{(i)}$; ossia è sufficiente costruire una matrice P dove l' i -esima colonna è un autovettore relativo all'autovalore presente in J_{ii} linearmente indipendente con gli altri autovettori presenti in P relativi allo stesso autovalore (esattamente nello stesso modo in cui si costruisce in generale tale P con la forma canonica di Jordan).

Se A e B sono diagonalizzabili, allora $A \sim B \iff p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$ (infatti due matrici diagonali hanno lo stesso polinomio caratteristico se e solo se compaiono gli stessi identici autovalori).

Se f è diagonalizzabile, allora ogni spazio W f -invariante di V è tale che:

$$W = (W \cap V_{\lambda_1}) \oplus \dots \oplus (W \cap V_{\lambda_k}),$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono gli autovalori distinti di f .

Due endomorfismi $f, g \in \operatorname{End}(V)$ diagonalizzabili si dicono simultaneamente diagonalizzabili se esiste una base \mathcal{B} di V tale per cui sia la matrice associata di f in \mathcal{B} che quella di g sono

¹lavorando su endomorfismi, la notazione $f|_W$ è impiegata per considerare f ristretta a W sia sul dominio che sul codominio.

diagonali. Vale in particolare che f e g sono simultaneamente diagonalizzabili se e solo se $f \circ g = g \circ f$. Per trovare tale base è sufficiente, dati $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ autovalori di f , considerare $g|_{V_{\lambda_i}}$ $\forall 1 \leq i \leq k$ (V_{λ_i} è infatti g -invariante, dachché, per $\underline{v} \in V_{\lambda_i}$, $f(g(\underline{v})) = g(f(\underline{v})) = g(\lambda_i \underline{v}) = \lambda_i g(\underline{v}) \implies g(\underline{v}) \in V_{\lambda_i}$), che, essendo una restrizione di un endomorfismo diagonalizzabile su un sottospazio invariante, è diagonalizzabile: presa allora una base di autovettori di $g|_{V_{\lambda_i}}$, questi sono anche base di autovettori di V_{λ_i} ; unendo tutti questi autovettori in un'unica base \mathcal{B} di V , si otterrà dunque che una base in cui le matrici associate di f e g sono diagonali.

Prodotto scalare e congruenza

Si consideri una mappa $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$. Si dice che φ è un prodotto scalare (e quindi che $\varphi \in \text{PS}(V)$, lo spazio dei prodotti scalari) se è una forma bilineare simmetrica. In particolare vale la seguente identità:

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^s a_i \underline{v}_i, \sum_{j=1}^t b_j \underline{w}_j \right) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^t a_i b_j \varphi(\underline{v}_i, \underline{w}_j).$$

Se $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è una base di V , si definisce $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j))_{i,j=1-n}$ come la matrice associata al prodotto scalare φ . In particolare, se $a_{\varphi} : V \rightarrow V^*$ è la mappa lineare che associa a \underline{v} il funzionale $\varphi(\underline{v}, \cdot) \in V^*$ tale che $\varphi(\underline{v}, \cdot)(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$. Si scrive (V, φ) per indicare uno spazio vettoriale V dotato del prodotto scalare φ .

Si definisce prodotto scalare *standard* il prodotto φ tale che $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$.

Si dice che due vettori $\underline{v}, \underline{w} \in V$ sono ortogonali tra loro, scritto come $\underline{v} \perp \underline{w}$, se $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0$. Dato W sottospazio di V , si definisce W^{\perp} come il sottospazio di V dei vettori ortogonali a tutti i vettori di W . Si dice che φ è non degenerare se $V^{\perp} = \{0\}$. Si scrive in particolare che $V^{\perp} = \text{Rad}(\varphi)$.

Si dice che $V = U \oplus W$ (ossia che U e W sono in somma diretta ortogonale) se $V = U \oplus W$ e $U \subseteq W^{\perp}$. Sia $i : W \rightarrow V$ tale che $\underline{w} \mapsto \underline{w}$. Si scrive $\varphi|_W$ intendendo $\varphi|_{W \times W}$.

Ad ogni prodotto scalare si può associare una forma quadratica (e viceversa) $q : V \rightarrow \mathbb{K}$ tale che $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v})$. Un vettore $\underline{v} \in V$ si dice isotropo se $q(\underline{v}) = 0$ (altrimenti si dice anisotropo). Si definisce il cono isotropo $\text{CI}(\varphi)$ come l'insieme dei vettori isotropi di V .

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si dice che φ è semidefinito positivo ($\varphi \geq 0$) se $q(\underline{v}) \geq 0 \forall \underline{v} \in V$, e che è semidefinito negativo ($\varphi \leq 0$) se $q(\underline{v}) \leq 0 \forall \underline{v} \in V$. Si dice che φ è definito positivo ($\varphi > 0$) se $\varphi \geq 0$ e se $q(\underline{v}) = 0 \iff \underline{v} = 0$, e che è definito negativo ($\varphi < 0$) se $\varphi \leq 0$ e se $q(\underline{v}) = 0 \iff \underline{v} = 0$.

Si dice che φ è definito se è definito positivo o definito negativo. Analogamente φ è semidefinito se è semidefinito positivo o semidefinito negativo.

- $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è simmetrica,
- $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$,

- $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(a_{\varphi})$,
- $\text{Ker } a_{\varphi} = V^{\perp}$,
- φ è non degenerare se e solo se $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è invertibile,
- $W^{\perp} = \text{Ker } i^{\top} \circ a_{\varphi}$,
- $a_{\varphi}(W^{\perp}) = \text{Ann}(W) \cap \text{Imm } a_{\varphi}$,
- $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V + \dim(W \cap V^{\perp})$ (da sopra),
- $V = W \oplus^{\perp} W^{\perp}$ se $\varphi|_W$ è non degenerare ($\iff W \cap W^{\perp} = \text{Rad}(\varphi|_W) = \{0\}$),
- $(W^{\perp})^{\perp} = W^{\perp\perp} = W + \text{Rad}(\varphi) = W + V^{\perp}$,
- $(U + W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$,
- $(U \cap W)^{\perp} \supseteq U^{\perp} + W^{\perp}$,
- $(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$, se φ è non degenerare,
- φ è definito $\iff \text{CI}(\varphi) = \{0\}$,
- φ è semidefinito $\iff \text{CI}(\varphi) = V^{\perp} = \text{Rad}(\varphi)$ (considera l'esistenza di due vettori $\underline{v}, \underline{w} \in V$ con forme quadratiche discordi, osserva che sono linearmente indipendenti e trova un $\lambda \in \mathbb{K}$ tale per cui $\underline{v} + \lambda \underline{w}$ crea un assurdo).

Se \mathcal{B}' è un'altra base di V , vale il seguente *teorema di cambiamento di base*:

$$M_{\mathcal{B}'}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_V).$$

Si definisce relazione di congruenza la relazione di equivalenza \cong ($\circ \equiv$) definita su $\text{Sym}(n, \mathbb{K})$ nel seguente modo:

$$A \cong B \iff \exists P \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) \mid A = P^{\top} B P.$$

- $A \cong B \implies \text{rg}(A) = \text{rg}(B)$ (il rango è invariante per congruenza; e dunque si può definire $\text{rg}(\varphi)$ come il rango di una qualsiasi matrice associata a φ),
- $A \cong B \implies \det(A) \det(B) \geq 0$ (in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ il segno del determinante è invariante per congruenza),
- Due matrici associate a φ in basi diverse sono congruenti per la formula di cambiamento di base.

Si definiscono i seguenti tre indici per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

- $\iota_+ = \max\{\dim W \mid W \subseteq V \text{ e } \varphi|_W > 0\}$,
- $\iota_- = \max\{\dim W \mid W \subseteq V \text{ e } \varphi|_W < 0\}$,
- $\iota_0 = \dim V^{\perp}$,

e si definisce segnatura di φ la terna $\sigma = (\iota_+, \iota_-, \iota_0)$.

Si dice che una base \mathcal{B} di V è ortogonale se i suoi vettori sono a due a due ortogonali (e quindi la matrice associata in tale base è diagonale). Se $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$, valgono i seguenti risultati:

- $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{q(\underline{v}+\underline{w})-q(\underline{v})-q(\underline{w})}{2}$ (formula di polarizzazione; φ è completamente determinata dalla sua forma quadratica),

- Esiste sempre una base ortogonale \mathcal{B} di V (teorema di Lagrange; è sufficiente considerare l'esistenza di un vettore anisotropo $\underline{w} \in V$ ed osservare che $V = W \oplus^{\perp} W^{\perp}$, dove $W = \text{Span}(V)$, concludendo per induzione; o in caso di non esistenza di tale \underline{w} , concludere per il risultato precedente),
- (se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Esiste sempre una base ortogonale \mathcal{B} di V tale che:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right),$$

dove $r = \text{rg}(\varphi)$ (teorema di Sylvester, caso complesso; si consideri una base ortogonale e se ne normalizzano i vettori anisotropi),

- Due matrici simmetriche con stesso rango allora non solo sono SD-equivalenti, ma sono anche congruenti,
- (se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) Esiste sempre una base ortogonale \mathcal{B} di V tale che:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{\iota_+} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_{\iota_-} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \cdot I_{\iota_0} \end{array} \right).$$

Inoltre σ è un invariante completo per la congruenza, e vale che, su una qualsiasi base ortogonale \mathcal{B}' di V , ι_+ è esattamente il numero di vettori anisotropi di base con forma quadratica positiva, che ι_- è il numero di vettori con forma negativa e che ι_0 è il numero di vettori isotropi (teorema di Sylvester, caso reale; si consideri una base ortogonale e se ne normalizzano i vettori anisotropi, facendo infine eventuali considerazioni dimensionali per dimostrare la seconda parte dell'enunciato),

- $\varphi > 0 \iff \sigma = (n, 0, 0)$ e $\varphi < 0 \iff \sigma = (0, n, 0)$,
- $\varphi \geq 0 \iff \sigma = (n - k, 0, k)$ e $\varphi \leq 0 \iff \sigma = (0, n - k, k)$, con $0 \leq k \leq n$ tale che $k = \dim V^{\perp}$,
- I vettori isotropi di una base ortogonale sono una base di V^{\perp} ,
- $\text{rg}(\varphi) = \iota_+ + \iota_-$,
- $n = \iota_+ + \iota_- + \iota_0$,
- Se W è un sottospazio di V , $\iota_+(\varphi) \geq \iota_+(\varphi|_W)$ e $\iota_-(\varphi) \geq \iota_-(\varphi|_W)$,
- Se $V = U \oplus^{\perp} W$, $\sigma(\varphi) = \sigma(\varphi|_U) + \sigma(\varphi|_W)$,
- Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$, allora:

$$\sigma = \left(\sum_{\substack{\lambda \in \text{sp}(\varphi) \\ \lambda > 0}} \mu_a(\lambda), \sum_{\substack{\lambda \in \text{sp}(A) \\ \lambda < 0}} \mu_a(\lambda), \mu_0(\lambda) \right),$$

come conseguenza del teorema spettrale reale.

Si chiama matrice di Sylvester una matrice della forma vista nell'enunciato del teorema di Sylvester reale, e si dice che una base \mathcal{B} è una base di Sylvester se la matrice ad essa associata è di Sylvester. Per il teorema di Sylvester, tale base esiste sempre, e la matrice di Sylvester è unica per ogni prodotto scalare φ .

Algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Data una base \mathcal{B} di V , se $|\text{CI}(\varphi) \cap \mathcal{B}| \leq 1$ (ossia se ogni vettore di \mathcal{B} è anisotropo o al più vi è un vettore isotropo, posto in fondo come \underline{v}_n), si può trovare una base ortogonale $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1', \dots, \underline{v}_n'\}$ a partire da \mathcal{B} tale che ne mantenga la stessa bandiera, ossia tale che:

$$\text{Span}(\underline{v}_1', \dots, \underline{v}_i') = \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i) \forall 1 \leq i \leq n.$$

Si definisce $C(\underline{w}, \underline{v}) = \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}{\varphi(\underline{w}, \underline{w})}$ come il coefficiente di Fourier di \underline{v} rispetto a \underline{w} . L'algoritmo allora funziona nel seguente modo:

1. Si prenda in considerazione \underline{v}_1 e si sottragga ad ogni altro vettore \underline{v}_i della base il vettore $C(\underline{v}_1, \underline{v}_i) \underline{v}_1$,
2. Si ripeta il processo considerando come \mathcal{B} tutti i vettori di \mathcal{B} con \underline{v}_1 escluso, o si termini l'algoritmo una volta che è rimasto un solo vettore.

Metodo di Jacobi per il calcolo della segnatura

Sia $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ una matrice associata a φ nella base \mathcal{B} . Sia $d_0 := 1$. Se $d_i = \det(A_{1, \dots, i}^{1, \dots, i})$ (è possibile anche prendere un'altra sequenza di minori, a patto che essi siano principali e che siano crescenti per inclusione) è diverso da zero per ogni

$1 \leq i \leq n-1$, allora ι_+ è il numero di permanenze di segno di d_i (zero escluso), ι_- è il numero di variazioni di segno (zero escluso), e ι_0 è 1 se $d_n = 0$ o 0 altrimenti.

In generale, se W è un sottospazio di W' , W ha codimensione 1 rispetto a W' e $\det(M_{\mathcal{B}_W}(\varphi|_W)) \neq 0$ per una base \mathcal{B}_W di W , allora la segnatura di $\varphi|_{W'}$ è la stessa di $\varphi|_W$, dove si aggiunge 1 a ι_+ , se i determinanti $\det(M_{\mathcal{B}_W}(\varphi|_W))$ e $\det(M_{\mathcal{B}_{W'}}(\varphi|_{W'}))$ (dove $\mathcal{B}_{W'}$ è una base di W') concordano di segno, 1 a ι_- , se sono discordi, o 1 a ι_0 se l'ultimo di questi due determinanti è nullo.

Dal metodo di Jacobi si deduce il criterio di definitezza di Sylvester: A è definita positiva se e solo se $d_i > 0 \forall 1 \leq i \leq n$; A è definita negativa se e solo se $(-1)^i d_i > 0 \forall 1 \leq i \leq n$.

Sottospazi isotropi e indice di Witt

Si dice che un sottospazio W di V è isotropo se $\varphi|_W = 0$, o equivalentemente se $W \subseteq W^\perp$ (i.e. se $W \cap W^\perp = W$, e quindi se $\text{Rad}(\varphi|_W) = W$). Si definisce allora l'indice di Witt $W(\varphi)$ come la dimensione massima di un sottospazio isotropo di V .

- V^\perp è un sottospazio isotropo,
- Se W è isotropo, allora $\dim W \leq \frac{\dim V + \dim \text{Rad}(\varphi)}{2}$,
- Se W è isotropo e φ è non degenerare, allora $\dim W \leq \frac{1}{2} \dim V$,
- Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, allora $W(\varphi) = \min\{\iota_+, \iota_-\} + \iota_0$ (è sufficiente considerare una base di Sylvester e creare una nuova base i cui i vettori sono o isotropi o della forma $\underline{v}_i - \underline{w}_i$, dove $q(\underline{v}_i) = 1$ e $q(\underline{w}_i) = 1$, concludendo con discussioni dimensionali),

- Se φ è definito, allora $W(\varphi) = 0$,
- Se φ è semidefinito, allora $W(\varphi) = \iota_0$ (e $W = V^\perp$ è un sottospazio isotropo di tale dimensione).

Isometrie tra spazi vettoriali

Due spazi vettoriali (V, φ) e (W, ψ) su \mathbb{K} si dicono isometrici tra loro se esiste un isomorfismo $f: V \rightarrow W$ tale che $\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \psi(f(\underline{v}_1), f(\underline{v}_2))$.

Se f è un isomorfismo tra V e W , sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- (i) (V, φ) e (W, ψ) sono isometrici tra loro tramite f ,
- (ii) $\forall \mathcal{B}$ base di V , $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{f(\mathcal{B})}(\psi)$,
- (iii) $\exists \mathcal{B}$ base di V , $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{f(\mathcal{B})}(\psi)$.

Inoltre, V e W sono isometrici se e solo se hanno la stessa dimensione e le matrici associate a φ e ψ in due basi di V e di W sono congruenti (infatti, in tal caso, esistono due basi di V e di W che condividono la stessa matrice associata, ed è possibile associare ad uno ad uno gli elementi di queste basi).

Pertanto, se \mathcal{B}_V e \mathcal{B}_W sono due basi di V e di W , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $M_{\mathcal{B}_V}(\varphi)$ e $M_{\mathcal{B}_W}(\psi)$ condividono la stessa segnatura, allora V e W sono isometrici tra loro (come conseguenza del teorema di Sylvester reale).

Analogamente, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $M_{\mathcal{B}_V}(\varphi)$ e $M_{\mathcal{B}_W}(\psi)$ condividono lo stesso rango, allora V e W sono isometrici tra loro (come conseguenza stavolta del teorema di Sylvester complesso).

Gabriel Antonio Videtta,

<https://poisson.phc.dm.unipi.it/~videtta/>