

# I prodotti di uno spazio vettoriale

Dispense del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

A.A. 2022/2023



UNIVERSITÀ DI PISA



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione al prodotto scalare</b>	<b>5</b>
1.1	Prime definizioni . . . . .	5
1.1.1	Prodotto scalare e vettori ortogonali rispetto a $\varphi$ . . . . .	5
1.1.2	Prodotto definito o semidefinito . . . . .	6
1.2	Il radicale di un prodotto scalare . . . . .	6
1.2.1	La forma quadratica $q$ associata a $\varphi$ e vettori (an)isotropi . . . . .	6
1.2.2	Matrice associata a $\varphi$ e relazione di congruenza . . . . .	7
1.2.3	Studio del radicale $V^\perp$ attraverso $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ . . . . .	8
1.2.4	Condizioni per la (semi)definitezza di un prodotto scalare . . . . .	9
1.3	Formula delle dimensioni e di polarizzazione rispetto a $\varphi$ . . . . .	10
1.4	Il teorema di Lagrange e basi ortogonali . . . . .	11
1.4.1	L'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt . . . . .	12
1.5	Il teorema di Sylvester . . . . .	13
1.5.1	Caso complesso . . . . .	13
1.5.2	Caso reale e segnatura di $\varphi$ . . . . .	14
1.5.2.1	Classificazione delle segnature per $n = 1, 2, 3$ . . . . .	16
1.5.2.2	Metodo di Jacobi per il calcolo della segnatura . . . . .	18
1.5.2.3	Criterio di Sylvester per la definitezza di un prodotto scalare . . . . .	19
1.5.2.4	Sottospazi isotropi e indice di Witt . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Prodotti hermitiani, spazi euclidei e teorema spettrale (non indicizzato)</b>	<b>22</b>



# 1 Introduzione al prodotto scalare

**Nota.** Nel corso del documento, per  $V$ , qualora non specificato, si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$ .

## 1.1 Prime definizioni

### 1.1.1 Prodotto scalare e vettori ortogonali rispetto a $\varphi$

**Definizione** (prodotto scalare). Un **prodotto scalare** su  $V$  è una forma bilineare simmetrica  $\varphi$  con argomenti in  $V$ .

**Esempio.** Sia  $\varphi : M(n, \mathbb{K}) \times M(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  tale che  $\varphi(A, B) = \text{tr}(AB)$ .

- ▶  $\varphi(A + A', B) = \text{tr}((A + A')B) = \text{tr}(AB + A'B) = \text{tr}(AB) + \text{tr}(A'B) = \varphi(A, B) + \varphi(A', B)$  (linearità nel primo argomento),
- ▶  $\varphi(\alpha A, B) = \text{tr}(\alpha AB) = \alpha \text{tr}(AB) = \alpha \varphi(A, B)$  (omogeneità nel primo argomento),
- ▶  $\varphi(A, B) = \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA) = \varphi(B, A)$  (simmetria),
- ▶ poiché  $\varphi$  è simmetrica,  $\varphi$  è lineare e omogenea anche nel secondo argomento, e quindi è una forma bilineare simmetrica, ossia un prodotto scalare su  $M(n, \mathbb{K})$ .

**Definizione** (vettori ortogonali). Due vettori  $\underline{v}, \underline{w} \in V$  si dicono **ortogonali** rispetto al prodotto scalare  $\varphi$ , ossia  $\underline{v} \perp \underline{w}$ , se  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0$ .

**Definizione** (somma diretta ortogonale). Siano  $U$  e  $W \subseteq V$  due sottospazi di  $V$  in somma diretta. Allora si dice che  $U$  e  $W$  sono in **somma diretta ortogonale** rispetto al prodotto scalare  $\varphi$  di  $V$ , ossia che  $U \oplus W = U \oplus^\perp W$ , se  $\varphi(\underline{u}, \underline{w}) = 0 \forall \underline{u} \in U, \underline{w} \in W$ .

**Definizione.** Si definisce prodotto scalare *canonico* di  $\mathbb{K}^n$  la forma bilineare simmetrica  $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$  con argomenti in  $\mathbb{K}^n$  tale che:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \underline{v}^\top \underline{w}, \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

**Osservazione.** Si può facilmente osservare che il prodotto scalare canonico di  $\mathbb{K}^n$  è effettivamente un prodotto scalare.

- ▶  $\varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{w}) = (\underline{v}_1 + \underline{v}_2)^\top \underline{w} = (\underline{v}_1^\top + \underline{v}_2^\top) \underline{w} = \underline{v}_1^\top \underline{w} + \underline{v}_2^\top \underline{w} = \varphi(\underline{v}_1, \underline{w}) + \varphi(\underline{v}_2, \underline{w})$  (linearità nel primo argomento),
- ▶  $\varphi(\alpha \underline{v}, \underline{w}) = (\alpha \underline{v})^\top \underline{w} = \alpha \underline{v}^\top \underline{w} = \alpha \varphi(\underline{v}, \underline{w})$  (omogeneità nel primo argomento),
- ▶  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \underline{v}^\top \underline{w} = (\underline{v}^\top \underline{w})^\top = \underline{w}^\top \underline{v} = \varphi(\underline{w}, \underline{v})$  (simmetria),
- ▶ poiché  $\varphi$  è simmetrica,  $\varphi$  è lineare e omogenea anche nel secondo argomento, e quindi è una forma bilineare simmetrica, ossia un prodotto scalare su  $\mathbb{K}^n$ .

**Esempio.** Altri esempi di prodotto scalare sono i seguenti:

- ▶  $\varphi(A, B) = \text{tr}(A^\top B)$  per  $M(n, \mathbb{K})$ ,
- ▶  $\varphi(p(x), q(x)) = p(a)q(a)$  per  $\mathbb{K}[x]$ , con  $a \in \mathbb{K}$ ,
- ▶  $\varphi(p(x), q(x)) = \sum_{i=1}^n p(x_i)q(x_i)$  per  $\mathbb{K}[x]$ , con  $x_1, \dots, x_n$  distinti,
- ▶  $\varphi(p(x), q(x)) = \int_a^b p(x)q(x)dx$  per lo spazio delle funzioni integrabili su  $\mathbb{R}$ , con  $a, b$  in  $\mathbb{R}$ ,
- ▶  $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^\top A \underline{y}$  per  $\mathbb{K}^n$ , con  $A \in M(n, \mathbb{K})$  simmetrica, detto anche **prodotto scalare indotto dalla matrice  $A$** , ed indicato con  $\varphi_A$ .

### 1.1.2 Prodotto definito o semidefinito

**Definizione.** Sia<sup>1</sup>  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Allora un prodotto scalare  $\varphi$  si dice **definito positivo** ( $\varphi > 0$ ) se  $\underline{v} \in V$ ,  $\underline{v} \neq \underline{0} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0$ . Analogamente  $\varphi$  è **definito negativo** ( $\varphi < 0$ ) se  $\underline{v} \neq \underline{0} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{v}) < 0$ . In generale si dice che  $\varphi$  è **definito** se è definito positivo o definito negativo.

Infine,  $\varphi$  è **semidefinito positivo** ( $\varphi \geq 0$ ) se  $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \geq 0 \forall \underline{v} \in V$  (o **semidefinito negativo**, e quindi  $\varphi \leq 0$ , se invece  $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \leq 0 \forall \underline{v} \in V$ ). Analogamente ai prodotti definiti, si dice che  $\varphi$  è **semidefinito** se è semidefinito positivo o semidefinito negativo.

**Esempio.** Il prodotto scalare canonico di  $\mathbb{R}^n$  è definito positivo: infatti  $\varphi((x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$ , se  $(x_1, \dots, x_n) \neq \underline{0}$ .

Al contrario, il prodotto scalare  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_2 y_2$  non è definito positivo:  $\varphi((x, y), (x, y)) = 0$ ,  $\forall (x, y) \mid x^2 = y^2$ , ossia se  $y = x$  o  $y = -x$ .

## 1.2 Il radicale di un prodotto scalare

### 1.2.1 La forma quadratica $q$ associata a $\varphi$ e vettori (an)isotropi

**Definizione.** Ad un dato prodotto scalare  $\varphi$  di  $V$  si associa una mappa  $q : V \rightarrow \mathbb{K}$ , detta **forma quadratica**, tale che  $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v})$ .

**Osservazione.** Si osserva che  $q$  non è lineare in generale: infatti  $q(\underline{v} + \underline{w}) \neq q(\underline{v}) + q(\underline{w})$  in  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione** (vettore (an)isotropo). Un vettore  $\underline{v} \in V$  si dice **isotropo** rispetto al prodotto scalare  $\varphi$  se  $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$ . Al contrario,  $\underline{v}$  si dice **anisotropo** se non è isotropo, ossia se  $q(\underline{v}) \neq 0$ .

**Definizione** (cono isotropo). Si definisce **cono isotropo** di  $V$  rispetto al prodotto scalare  $\varphi$  il seguente insieme:

<sup>1</sup>In realtà, la definizione è facilmente estendibile a qualsiasi campo, purché esso sia ordinato.

## 1 Introduzione al prodotto scalare

$$\text{CI}(\varphi) = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0\},$$

ossia l'insieme dei vettori isotropi di  $V$ .

**Esempio.** Rispetto al prodotto scalare  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$ , i vettori isotropi sono i vettori della forma  $(x, y, z)$  tali che  $x^2 + y^2 = z^2$ , e quindi  $\text{CI}(\varphi)$  è l'insieme dei vettori stanti sul cono di equazione  $x^2 + y^2 = z^2$ .

### 1.2.2 Matrice associata a $\varphi$ e relazione di congruenza

**Osservazione.** Come già osservato in generale per le applicazioni multilineari, il prodotto scalare è univocamente determinato dai valori che assume nelle coppie  $\underline{v}_i, \underline{v}_j$  estraibili da una base  $\mathcal{B}$ . Infatti, se  $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k)$ ,  $\underline{v} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{v}_i$  e  $\underline{w} = \sum_{i=1}^k \beta_i \underline{v}_i$ , allora:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \alpha_i \beta_j \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j).$$

**Definizione.** Sia  $\varphi$  un prodotto scalare di  $V$  e sia  $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$  una base ordinata di  $V$ . Allora si definisce la **matrice associata** a  $\varphi$  come la matrice:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j))_{i,j=1-n} \in M(n, \mathbb{K}).$$

**Osservazione.**

►  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  è simmetrica, infatti  $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \varphi(\underline{v}_j, \underline{v}_i)$ , dal momento che il prodotto scalare è simmetrico,

►  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$ .

**Teorema 1.1.** (di cambiamento di base per matrici di prodotti scalari) Siano  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  due basi ordinate di  $V$ . Allora, se  $\varphi$  è un prodotto scalare di  $V$  e  $P = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{Id}_V)$ , vale la seguente identità:

$$\underbrace{M_{\mathcal{B}'}(\varphi)}_A = P^{\top} \underbrace{M_{\mathcal{B}}(\varphi)}_A P.$$

*Dimostrazione.* Siano  $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$  e  $\mathcal{B}' = (\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n)$ . Allora  $A'_{ij} = \varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_j) = [\underline{w}_i]_{\mathcal{B}'}^{\top} A [\underline{w}_j]_{\mathcal{B}'} = (P^i)^{\top} A P^j = P_i^{\top} (A P)^j = (P^{\top} A P)_{ij}$ , da cui la tesi.  $\square$

**Definizione.** Si definisce **congruenza** la relazione di equivalenza  $\cong$  (denotata anche come  $\equiv$ ) definita nel seguente modo su  $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ :

$$A \cong B \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists P \in GL(n, \mathbb{K}) \mid A = P^{\top} B P.$$

**Osservazione.** Si può facilmente osservare che la congruenza è in effetti una relazione di equivalenza.

- ▶  $A = I^\top AI \implies A \cong A$  (riflessione),
- ▶  $A \cong B \implies A = P^\top BP \implies B = (P^\top)^{-1}AP^{-1} = (P^{-1})^\top AP^{-1} \implies B \cong A$  (simmetria),
- ▶  $A \cong B, B \cong C \implies A = P^\top BP, B = Q^\top CQ$ , quindi  $A = P^\top Q^\top CQP = (QP)^\top C(QP) \implies A \cong C$  (transitività).

**Osservazione.** Si osservano alcune proprietà della congruenza.

- ▶ Per il teorema di cambiamento di base del prodotto scalare, due matrici associate a uno stesso prodotto scalare sono sempre congruenti (esattamente come due matrici associate a uno stesso endomorfismo sono sempre simili).
- ▶ Se  $A$  e  $B$  sono congruenti,  $A = P^\top BP \implies \text{rg}(A) = \text{rg}(P^\top BP) = \text{rg}(BP) = \text{rg}(B)$ , dal momento che  $P$  e  $P^\top$  sono invertibili; quindi il rango è un invariante per congruenza. Allora si può ben definire il rango  $\text{rg}(\varphi)$  di un prodotto scalare come il rango della matrice associata di  $\varphi$  in una qualsiasi base di  $V$ .
- ▶ Se  $A$  e  $B$  sono congruenti,  $A = P^\top BP \implies \det(A) = \det(P^\top BP) = \det(P^\top) \det(B) \det(P) = \det(P)^2 \det(B)$ . Quindi, per  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , il segno del determinante è un altro invariante per congruenza.

### 1.2.3 Studio del radicale $V^\perp$ attraverso $M_B(\varphi)$

**Definizione.** Si definisce il **radicale** di un prodotto scalare  $\varphi$  come lo spazio:

$$V^\perp = \text{Rad}(\varphi) = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \forall \underline{w} \in V\}$$

**Osservazione.** Il radicale del prodotto scalare canonico su  $\mathbb{R}^n$  ha dimensione nulla, dal momento che  $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0 \implies \underline{v} \notin V^\perp$ . In generale ogni prodotto scalare definito positivo (o negativo) è non degenere, dal momento che ogni vettore non nullo non è isotropo, e dunque non può appartenere a  $V^\perp$ .

**Definizione.** Un prodotto scalare si dice **degenere** se il radicale dello spazio su tale prodotto scalare ha dimensione non nulla.

**Osservazione.** Sia  $\alpha_\varphi : V \rightarrow V^*$  la mappa<sup>2</sup> tale che  $\alpha_\varphi(\underline{v}) = p$ , dove  $p(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ .

Si osserva che  $\alpha_\varphi$  è un'applicazione lineare. Infatti,  $\forall \underline{v}, \underline{w}, \underline{u} \in V, \alpha_\varphi(\underline{v} + \underline{w})(\underline{u}) = \varphi(\underline{v} + \underline{w}, \underline{u}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{w}, \underline{u}) = \alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{u}) + \alpha_\varphi(\underline{w})(\underline{u}) \implies \alpha_\varphi(\underline{v} + \underline{w}) = \alpha_\varphi(\underline{v}) + \alpha_\varphi(\underline{w})$ . Inoltre  $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V, \lambda \in \mathbb{K}, \alpha_\varphi(\lambda \underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\lambda \underline{v}, \underline{w}) = \lambda \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \lambda \alpha_\varphi(\underline{v})(\underline{w}) \implies \alpha_\varphi(\lambda \underline{v}) = \lambda \alpha_\varphi(\underline{v})$ .

Si osserva inoltre che  $\text{Ker } \alpha_\varphi$  raccoglie tutti i vettori  $\underline{v} \in V$  tali che  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \forall \underline{w} \in W$ , ossia esattamente i vettori di  $V^\perp$ , per cui si conclude che  $V^\perp = \text{Ker } \alpha_\varphi$  (per cui  $V^\perp$  è effettivamente uno spazio vettoriale). Se  $V$  ha dimensione finita,  $\dim V = \dim V^*$ , e si

<sup>2</sup>In letteratura questa mappa, se invertibile, è nota come *isomorfismo musicale*, ed è in realtà indicata come  $\flat$ .



## 1 Introduzione al prodotto scalare

può allora concludere che  $\dim V^\perp > 0 \iff \text{Ker } \alpha_\varphi \neq \{\underline{0}\} \iff \alpha_\varphi$  non è invertibile (infatti lo spazio di partenza e di arrivo di  $\alpha_\varphi$  hanno la stessa dimensione). In particolare,  $\alpha_\varphi$  non è invertibile se e solo se  $\det(\alpha_\varphi) = 0$ .

Sia  $\mathcal{B} = (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$  una base ordinata di  $V$ . Si consideri allora la base ordinata del duale costruita su  $\mathcal{B}$ , ossia  $\mathcal{B}^* = (\underline{v}_1^*, \dots, \underline{v}_n^*)$ . Allora  $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\alpha_\varphi)^i = [\alpha_\varphi(\underline{v}_i)]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_1) \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_n) \end{pmatrix} \underset{\varphi \text{ è simmetrica}}{=} \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i) \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v}_n, \underline{v}_i) \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^i$ . Quindi  $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\alpha_\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ .

Si conclude allora che  $\varphi$  è degenere se e solo se  $\det(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = 0$  e che  $V^\perp \cong \text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  mediante l'isomorfismo del passaggio alle coordinate.

### 1.2.4 Condizioni per la (semi)definitezza di un prodotto scalare

**Proposizione 1.1.** Sia  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Allora  $\varphi$  è definito  $\iff \text{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$ .

*Dimostrazione.* Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

( $\implies$ ) Se  $\varphi$  è definito, allora  $\varphi(\underline{v}, \underline{v})$  è sicuramente diverso da zero se  $\underline{v} \neq \underline{0}$ . Pertanto  $\text{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$ .

( $\impliedby$ ) Sia  $\varphi$  non definito. Se non esistono  $\underline{v} \neq \underline{0}, \underline{w} \neq \underline{0} \in V$  tali che  $q(\underline{v}) > 0$  e che  $q(\underline{w}) < 0$ , allora  $\varphi$  è necessariamente semidefinito. In tal caso, poiché  $\varphi$  non è definito, deve anche esistere  $\underline{u} \in V, \underline{u} \neq \underline{0} \mid q(\underline{u}) = 0 \implies \text{CI}(\varphi) \neq \{\underline{0}\}$ .

Se invece tali  $\underline{v}, \underline{w}$  esistono, questi sono anche linearmente indipendenti. Se infatti non lo fossero, uno sarebbe il multiplo dell'altro, e quindi le loro due forme quadratiche sarebbero concordi di segno,  $\neq$ . Si consideri allora la combinazione lineare  $\underline{v} + \lambda \underline{w}$  al variare di  $\lambda \in \mathbb{R}$ , imponendo che essa sia isotropa:

$$q(\underline{v} + \lambda \underline{w}) = 0 \iff \lambda^2 q(\underline{w}) + 2\lambda q(\underline{v}, \underline{w}) + q(\underline{v}) = 0.$$

Dal momento che  $\frac{\Delta}{4} = \overbrace{q(\underline{v}, \underline{w})^2}^{\geq 0} - \overbrace{q(\underline{w})q(\underline{v})}^{> 0}$  è sicuramente maggiore di zero, tale equazione ammette due soluzioni reali  $\lambda_1, \lambda_2$ . In particolare  $\lambda_1$  è tale che  $\underline{v} + \lambda_1 \underline{w} \neq \underline{0}$ , dal momento che  $\underline{v}$  e  $\underline{w}$  sono linearmente indipendenti. Allora  $\underline{v} + \lambda_1 \underline{w}$  è un vettore isotropo non nullo di  $V \implies \text{CI}(\varphi) \neq \{\underline{0}\}$ .

Si conclude allora, tramite la contronominale, che se  $\text{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$ ,  $\varphi$  è necessariamente definito. □

**Proposizione 1.2.** Sia  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Allora  $\varphi$  è semidefinito  $\iff \text{CI}(\varphi) = V^\perp$ .

*Dimostrazione.* Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

( $\implies$ ) Sia  $\varphi$  semidefinito. Chiaramente  $V^\perp \subseteq \text{CI}(\varphi)$ . Si assuma per assurdo che  $V^\perp \subsetneq \text{CI}(\varphi)$ . Sia allora  $\underline{v}$  tale che  $\underline{v} \in \text{CI}(\varphi)$  e che  $\underline{v} \notin V^\perp$ . Poiché  $\underline{v} \notin V^\perp$ , esiste un vettore  $\underline{w} \in V$  tale che  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) \neq 0$ . Si osserva che  $\underline{v}$  e  $\underline{w}$  sono linearmente indipendenti tra loro. Se infatti non lo fossero, esisterebbe  $\mu \in \mathbb{R}$  tale che  $\underline{w} = \mu \underline{v} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \mu \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$ ,  $\sharp$ .

Si consideri allora la combinazione lineare  $\underline{v} + \lambda \underline{w}$ . Si consideri  $\varphi$  semidefinito positivo. In tal caso si può imporre che la valutazione di  $q$  in  $\underline{v} + \lambda \underline{w}$  sia strettamente negativa:

$$q(\underline{v} + \lambda \underline{w}) < 0 \iff \overbrace{q(\underline{v})}^{=0} + \lambda^2 q(\underline{w}) + 2\lambda \varphi(\underline{v}, \underline{w}) < 0.$$

In particolare, dal momento che  $\frac{\Delta}{4} = \varphi(\underline{v}, \underline{w})^2 > 0$ , tale disequazione ammette una soluzione  $\lambda_1 \neq 0$ . Inoltre  $\underline{v} + \lambda_1 \underline{w} \neq \underline{0}$ , dal momento che  $\underline{v}$  e  $\underline{w}$  sono linearmente indipendenti. Allora si è trovato un vettore non nullo per cui la valutazione in esso di  $q$  è negativa, contraddicendo l'ipotesi di semidefinitezza positiva di  $\varphi$ ,  $\sharp$ . Analogamente si dimostra la tesi per  $\varphi$  semidefinito negativo.

( $\impliedby$ ) Sia  $\varphi$  non semidefinito. Allora devono esistere  $\underline{v}, \underline{w} \in V$  tali che  $q(\underline{v}) > 0$  e che  $q(\underline{w}) < 0$ . In particolare,  $\underline{v}$  e  $\underline{w}$  sono linearmente indipendenti tra loro, dal momento che se non lo fossero, uno sarebbe multiplo dell'altro, e le valutazioni in essi di  $q$  sarebbero concordi di segno,  $\sharp$ . Si consideri allora la combinazione lineare  $\underline{v} + \lambda \underline{w}$ , imponendo che  $q$  si annulli in essa:

$$q(\underline{v} + \lambda \underline{w}) = 0 \iff \lambda^2 q(\underline{w}) + 2\lambda q(\underline{v}, \underline{w}) + q(\underline{v}) = 0.$$

In particolare, dal momento che  $\frac{\Delta}{4} = \varphi(\underline{v}, \underline{w})^2 > 0$ , tale disequazione ammette una soluzione  $\lambda_1 \neq 0$ . Allora, per tale  $\lambda_1$ ,  $\underline{v} + \lambda_1 \underline{w} \in \text{CI}(\varphi)$ . Tuttavia  $\varphi(\underline{v} + \lambda_1 \underline{w}, \underline{v} - \lambda_1 \underline{w}) = q(\underline{v}) - \underbrace{\lambda_1^2 q(\underline{w})}_{<0} > 0 \implies \underline{v} + \lambda_1 \underline{w} \notin V^\perp \implies \text{CI}(\varphi) \not\supseteq V^\perp$ .

Si conclude allora, tramite la contronominale, che se  $\text{CI}(\varphi) = V^\perp$ ,  $\varphi$  è necessariamente semidefinito.  $\square$

### 1.3 Formula delle dimensioni e di polarizzazione rispetto a $\varphi$

**Definizione** (sottospazio ortogonale a  $W$ ). Sia  $W \subseteq V$  un sottospazio di  $V$ . Si identifica allora come **sottospazio ortogonale a  $W$**  il sottospazio  $W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \forall \underline{w} \in W\}$ .

**Proposizione 1.3** (formula delle dimensioni del prodotto scalare). Sia  $W \subseteq V$  un sottospazio di  $V$ . Allora vale la seguente identità:

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V + \dim(W \cap V^\perp).$$

## 1 Introduzione al prodotto scalare

*Dimostrazione.* Si consideri l'applicazione lineare  $a_\varphi$  introdotta precedentemente. Si osserva che  $W^\perp = \text{Ker}(i^\top \circ a_\varphi)$ , dove  $i : W \rightarrow V$  è tale che  $i(\underline{w}) = \underline{w}$ . Allora, per la formula delle dimensioni, vale la seguente identità:

$$\dim V = \dim W^\perp + \text{rg}(i^\top \circ a_\varphi). \quad (1.1)$$

Sia allora  $f = i^\top \circ a_\varphi$ . Si consideri ora l'applicazione  $g = a_\varphi \circ i : W \rightarrow V^*$ . Sia ora  $\mathcal{B}_W$  una base di  $W$  e  $\mathcal{B}_V$  una base di  $V$ . Allora le matrici associate di  $f$  e di  $g$  sono le seguenti:

$$(i) \quad M_{\mathcal{B}_W^*}^{\mathcal{B}_V}(f) = M_{\mathcal{B}_W^*}^{\mathcal{B}_V}(i^\top \circ a_\varphi) = \underbrace{M_{\mathcal{B}_W^*}^{\mathcal{B}_V}(i^\top)}_A \underbrace{M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_V}(a_\varphi)}_B = AB,$$

$$(ii) \quad M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}(g) = M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}(a_\varphi \circ i) = \underbrace{M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_V}(a_\varphi)}_B \underbrace{M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}(i)}_{A^\top} = BA^\top \stackrel{B^\top=B}{=} (AB)^\top.$$

Poiché  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^\top)$ , si deduce che  $\text{rg}(f) = \text{rg}(g) \implies \text{rg}(i^\top \circ a_\varphi) = \text{rg}(a_\varphi \circ i) = \text{rg}(a_\varphi|_W) = \dim W - \dim \text{Ker } a_\varphi|_W$ , ossia che:

$$\text{rg}(i^\top \circ a_\varphi) = \dim W - \underbrace{\dim(W \cap \text{Ker } a_\varphi)}_{V^\perp} = \dim W - \dim(W \cap V^\perp). \quad (1.2)$$

Si conclude allora, sostituendo l'equazione (1.2) nell'equazione (1.1), che  $\dim V = \dim W^\perp + \dim W - \dim(W \cap V^\perp)$ , ossia la tesi.  $\square$

**Osservazione.** Si identifica  $\underline{w}^\perp$  come il sottospazio di tutti i vettori di  $V$  ortogonali a  $\underline{w}$ . In particolare, se  $W = \text{Span}(\underline{w})$  è il sottospazio generato da  $\underline{w} \neq \underline{0}$ ,  $\underline{w} \in V$ , allora  $W^\perp = \underline{w}^\perp$ . Inoltre valgono le seguenti equivalenze:  $\underline{w} \notin W^\perp \iff \text{Rad}(\varphi|_W) = W \cap W^\perp = \{\underline{0}\} \iff \underline{w}$  non è isotropo  $\iff V = W \oplus^\perp W^\perp$ .

In generale, se  $W$  è un sottospazio qualsiasi di  $V$  tale che  $W \cap W^\perp = \{\underline{0}\}$ , vale che  $V = W \oplus^\perp W^\perp$ .

**Proposizione 1.4** (formula di polarizzazione). Se  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ , un prodotto scalare è univocamente determinato dalla sua forma quadratica  $q$ . In particolare vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w})}{2}.$$

### 1.4 Il teorema di Lagrange e basi ortogonali

**Definizione.** Si definisce **base ortogonale** di  $V$  una base  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$  tale per cui  $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = 0 \iff i \neq j$ , ossia una base per cui la matrice associata del prodotto scalare è diagonale.

**Teorema 1.2** (di Lagrange). Ogni spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{K}$  tale per cui  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$  ammette una base ortogonale.

*Dimostrazione.* Si dimostra il teorema per induzione su  $n := \dim V$ . Per  $n \leq 1$ , la tesi è triviale (se esiste una base, tale base è già ortogonale). Sia allora il teorema vero per  $i \leq n$ . Se  $V$  ammette un vettore non isotropo  $\underline{w}$ , sia  $W = \text{Span}(\underline{w})$  e si consideri la decomposizione  $V = W \oplus W^\perp$ . Poiché  $W^\perp$  ha dimensione  $n - 1$ , per ipotesi induttiva ammette una base ortogonale. Inoltre, tale base è anche ortogonale a  $W$ , e quindi l'aggiunta di  $\underline{w}$  a questa base ne fa una base ortogonale di  $V$ . Se invece  $V$  non ammette vettori non isotropi, ogni forma quadratica è nulla, e quindi il prodotto scalare è nullo per la *formula di polarizzazione*. Allora in questo caso ogni base è una base ortogonale, completando il passo induttivo, e dunque la dimostrazione.  $\square$

### 1.4.1 L'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

**Definizione** (coefficiente di Fourier). Siano  $\underline{v} \in V$  e  $\underline{w} \in V \setminus \text{CI}(\varphi)$ . Allora si definisce il **coefficiente di Fourier** di  $\underline{v}$  rispetto a  $\underline{w}$  come il rapporto  $C(\underline{w}, \underline{v}) = \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}{\varphi(\underline{w}, \underline{w})}$ .

**Algoritmo 1.1** (algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt). Se  $\text{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$  (e quindi nel caso di  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , dalla *Proposizione 1.1*, se  $\varphi$  è definito) ed è data una base  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  per  $V$ , è possibile applicare l'**algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt** per ottenere da  $\mathcal{B}$  una nuova base  $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1', \dots, \underline{v}_n'\}$  con le seguenti proprietà:

- (i)  $\mathcal{B}'$  è una base ortogonale,
- (ii)  $\mathcal{B}'$  mantiene la stessa bandiera di  $\mathcal{B}$  (ossia  $\text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i) = \text{Span}(\underline{v}_1', \dots, \underline{v}_i')$  per ogni  $1 \leq i \leq n$ ).

L'algoritmo si applica nel seguente modo: si prenda in considerazione  $\underline{v}_1$  e si sottragga ad ogni altro vettore della base il vettore  $C(\underline{v}_1, \underline{v}_i) \underline{v}_1 = \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1$ , rendendo ortogonale ogni altro vettore della base con  $\underline{v}_1$ . Si sta quindi applicando la mappa  $\underline{v}_i \mapsto \underline{v}_i - \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1 = \underline{v}_i^{(1)}$ . Si verifica infatti che  $\underline{v}_1$  e  $\underline{v}_i^{(1)}$  sono ortogonali per  $2 \leq i \leq n$ :

$$\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i^{(1)}) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i) - \varphi\left(\underline{v}_1, \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1\right) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i) - \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i) = 0.$$

Poiché  $\underline{v}_1$  non è isotropo, si deduce che vale la decomposizione  $V = \text{Span}(\underline{v}_1) \oplus \text{Span}(\underline{v}_1)^\perp$ . In particolare  $\dim \text{Span}(\underline{v}_1)^\perp = n - 1$ : essendo allora i vettori  $\underline{v}_2^{(1)}, \dots, \underline{v}_n^{(1)}$  linearmente indipendenti e appartenenti a  $\text{Span}(\underline{v}_1)^\perp$ , ne sono una base. Si conclude quindi che vale la seguente decomposizione:

$$V = \text{Span}(\underline{v}_1) \oplus^\perp \text{Span}(\underline{v}_2^{(1)}, \dots, \underline{v}_n^{(1)}).$$

Si riapplica dunque l'algoritmo di Gram-Schmidt prendendo come spazio vettoriale lo spazio generato dai vettori a cui si è applicato precedentemente l'algoritmo, ossia  $V' = \text{Span}(\underline{v}_2^{(1)}, \dots, \underline{v}_n^{(1)})$ , fino a che non si ottiene  $V' = \{\underline{0}\}$ .

**Esempio.** Si consideri  $V = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , ossia  $\mathbb{R}^3$  dotato del prodotto scalare standard. Si applica l'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt sulla seguente base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1 = e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3} \right\}.$$

Alla prima iterazione dell'algoritmo si ottengono i seguenti vettori:

- $\underline{v_2}^{(1)} = \underline{v_2} - \frac{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_2})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})} \underline{v_1} = \underline{v_2} - \underline{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e_2},$
- $\underline{v_3}^{(1)} = \underline{v_3} - \frac{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_3})}{\varphi(\underline{v_1}, \underline{v_1})} \underline{v_1} = \underline{v_3} - \underline{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Si considera ora  $V' = \text{Span}(\underline{v_2}^{(1)}, \underline{v_3}^{(1)})$ . Alla seconda iterazione dell'algoritmo si ottiene allora il seguente vettore:

- $\underline{v_3}^{(2)} = \underline{v_3}^{(1)} - \frac{\varphi(\underline{v_2}^{(1)}, \underline{v_3}^{(1)})}{\varphi(\underline{v_2}^{(1)}, \underline{v_2}^{(1)})} \underline{v_2}^{(1)} = \underline{v_3}^{(1)} - \underline{v_2}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e_3}.$

Quindi la base ottenuta è  $\mathcal{B}' = \{\underline{e_1}, \underline{e_2}, \underline{e_3}\}$ , ossia la base canonica di  $\mathbb{R}^3$ .

## 1.5 Il teorema di Sylvester

### 1.5.1 Caso complesso

**Nota.** D'ora in poi, nel corso del documento, si assumerà  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ .

**Teorema 1.3** (di Sylvester, caso complesso). Sia  $\mathbb{K}$  un campo i cui elementi sono tutti quadrati di un altro elemento del campo (e.g.  $\mathbb{C}$ ). Allora esiste una base ortogonale  $\mathcal{B}$  tale per cui:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left( \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right).$$

*Dimostrazione.* Per il teorema di Lagrange, esiste una base ortogonale  $\mathcal{B}'$  di  $V$ . Si riordini allora la base  $\mathcal{B}'$  in modo tale che la forma quadratica valutata nei primi elementi sia sempre diversa da zero. Allora, poiché ogni elemento di  $\mathbb{K}$  è per ipotesi quadrato di un altro elemento di  $\mathbb{K}$ , si sostituisca  $\mathcal{B}'$  con una base  $\mathcal{B}$  tale per cui, se  $q(\underline{v}_i) = 0$ ,  $\underline{v}_i \mapsto \underline{v}_i$ , e altrimenti  $\underline{v}_i \mapsto \frac{\underline{v}_i}{\sqrt{q(\underline{v}_i)}}$ . Allora  $\mathcal{B}$  è una base tale per cui la matrice associata del prodotto scalare in tale base è proprio come desiderata nella tesi, dove  $r$  è il numero di elementi tali per cui la forma quadratica valutata in essi sia diversa da zero.  $\square$

**Osservazione.**

► Si può immediatamente concludere che il rango è un invariante completo per la congruenza in un campo  $\mathbb{K}$  in cui tutti gli elementi sono quadrati, ossia che  $A \cong B \iff \text{rg}(A) = \text{rg}(B)$ , se  $A$  e  $B$  sono matrici simmetriche con elementi in  $\mathbb{K}$ .

Ogni matrice simmetrica rappresenta infatti un prodotto scalare, ed è pertanto congruente ad una matrice della forma desiderata nell'enunciato del teorema di Sylvester complesso. Poiché il rango è un invariante della congruenza, si ricava che  $r$  nella forma della matrice di Sylvester, rappresentando il rango, è anche il rango di ogni sua matrice congruente.

In particolare, se due matrici simmetriche hanno lo stesso rango, allora sono congruenti alla stessa matrice di Sylvester, e quindi, essendo la congruenza una relazione di equivalenza, sono congruenti a loro volta tra di loro.

► Due matrici simmetriche in  $\mathbb{K}$  con stesso rango, allora, non solo sono SD-equivalenti, ma sono anche congruenti.

► Ogni base ortogonale deve quindi avere lo stesso numero di vettori isotropi, dal momento che tale numero rappresenta la dimensione del radicale  $V^\perp$ .

### 1.5.2 Caso reale e segnatura di $\varphi$

**Definizione** (segnatura di un prodotto scalare). Data una base ortogonale  $\mathcal{B}$  di  $V$  rispetto al prodotto scalare  $\varphi$ , si definiscono i seguenti indici:

$$\begin{aligned} \iota_+(\varphi) &= \max\{\dim W \mid W \subseteq V \text{ e } \varphi|_W > 0\}, & \text{(indice di positività)} \\ \iota_-(\varphi) &= \max\{\dim W \mid W \subseteq V \text{ e } \varphi|_W < 0\}, & \text{(indice di negatività)} \\ \iota_0(\varphi) &= \dim V^\perp. & \text{(indice di nullità)} \end{aligned}$$

Quando il prodotto scalare  $\varphi$  è noto dal contesto, si semplifica la notazione scrivendo solo  $\iota_+$ ,  $\iota_-$  e  $\iota_0$ . In particolare, la terna  $\sigma(\varphi) = \sigma = (i_+, i_-, i_0)$  è detta **segnatura** del prodotto  $\varphi$ .

**Teorema 1.4** (di Sylvester, caso reale). Sia  $\mathbb{K}$  un campo ordinato i cui elementi positivi sono tutti quadrati (e.g.  $\mathbb{R}$ ). Allora esiste una base ortogonale  $\mathcal{B}$  tale per cui:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \left( \begin{array}{c|cc} I_{\iota_+} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_{\iota_-} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \cdot I_{\iota_0} \end{array} \right).$$

Inoltre, per ogni base ortogonale, esistono esattamente  $\iota_+$  vettori della base con forma quadratica positiva,  $\iota_-$  con forma negativa e  $\iota_0$  con forma nulla.

*Dimostrazione.* Per il teorema di Lagrange, esiste una base ortogonale  $\mathcal{B}'$  di  $V$ . Si riordini la base in modo tale che la forma quadratica valutata nei primi elementi sia strettamente positiva, che nei secondi elementi sia strettamente negativa e che negli ultimi sia nulla. Si sostituisca  $\mathcal{B}'$  con una base  $\mathcal{B}$  tale per cui, se  $q(\underline{v}_i) > 0$ , allora  $\underline{v}_i \mapsto \frac{\underline{v}_i}{\sqrt{q(\underline{v}_i)}}$ ; se  $q(\underline{v}_i) < 0$ , allora  $\underline{v}_i \mapsto \frac{\underline{v}_i}{\sqrt{-q(\underline{v}_i)}}$ ; altrimenti  $\underline{v}_i \mapsto \underline{v}_i$ . Si è allora trovata una base la cui matrice associata del prodotto scalare è come desiderata nella tesi.

Sia ora  $\mathcal{B}$  una qualsiasi base ortogonale di  $V$ . Siano inoltre  $a$  il numero di vettori della base con forma quadratica positiva,  $b$  il numero di vettori con forma negativa e  $c$  quello dei vettori con forma nulla. Si consideri  $W_+ = \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_a)$ ,  $W_- = \text{Span}(\underline{v}_{a+1}, \dots, \underline{v}_b)$ ,  $W_0 = \text{Span}(\underline{v}_{b+1}, \dots, \underline{v}_c)$ .

Sia  $M = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ . Si osserva che  $c = n - \text{rg}(M) = \dim \text{Ker}(M) = \dim V^\perp = \iota_0$ . Inoltre  $\forall \underline{v} \in W_+$ , dacché  $\mathcal{B}$  è ortogonale,  $q(\underline{v}) = q(\sum_{i=1}^a \alpha_i \underline{v}_i) = \sum_{i=1}^a \alpha_i^2 q(\underline{v}_i) > 0$ , e quindi  $\varphi|_{W_+} > 0$ , da cui  $\iota_+ \geq a$ . Analogamente  $\iota_- \geq b$ .

Si mostra ora che è impossibile che  $\iota_+ > a$ . Se così infatti fosse, sia  $W$  tale che  $\dim W = \iota_+$  e che  $\varphi|_W > 0$ .  $\iota_+ + b + c$  sarebbe maggiore di  $a + b + c = n := \dim V$ . Quindi, per la formula di Grassman,  $\dim(W + W_- + W_0) = \dim W + \dim(W_- + W_0) - \dim(W \cap (W_- + W_0)) \implies \dim(W \cap (W_- + W_0)) = \dim W + \dim(W_- + W_0) - \dim(W + W_- + W_0) > 0$ , ossia esisterebbe  $\underline{v} \neq \{0\} \mid \underline{v} \in W \cap (W_- + W_0)$ . Tuttavia questo è assurdo, dacché dovrebbe valere sia  $q(\underline{v}) > 0$  che  $q(\underline{v}) < 0$ ,  $\neq$ . Quindi  $\iota_+ = a$ , e analogamente  $\iota_- = b$ .  $\square$

**Definizione.** Si dice **base di Sylvester** una base di  $V$  tale per cui la matrice associata di  $\varphi$  sia esattamente nella forma vista nell'enunciato del teorema di Sylvester. Analogamente si definisce tale matrice come **matrice di Sylvester**.

**Osservazione.**

► Come conseguenza del teorema di Sylvester reale, si osserva che la segnatura di una matrice simmetrica reale è invariante per cambiamento di base, se la base è ortogonale.

► La segnatura è un invariante completo per la congruenza nel caso reale. Se infatti due matrici hanno la stessa segnatura, queste sono entrambe congruenti alla stessa matrice di Sylvester, e quindi, essendo la congruenza una relazione di equivalenza, sono congruenti tra loro. Analogamente vale il viceversa, dal momento che ogni base ortogonale di due matrici congruenti deve contenere gli stessi numeri  $\iota_+$ ,  $\iota_-$  e  $\iota_0$  di vettori di base con

forma quadratica positiva, negativa e nulla.

► Vale che  $\varphi$  è definito positivo  $\iff \sigma = (n, 0, 0)$ . Infatti, per il teorema di Sylvester reale,  $i_+ = n \iff$  la dimensione del massimo sottospazio di  $V$  su cui  $\varphi$  è definito positivo è  $n \iff \varphi$  è definito positivo. Analogamente  $\varphi$  è definito negativo  $\iff \sigma = (0, n, 0)$ .

► Nello stesso spirito dei prodotti definiti,  $\varphi$  è semidefinito positivo  $\iff \iota_- = 0$ . Infatti valgono le seguenti equivalenze:  $\varphi$  è semidefinito positivo  $\iff$  non esiste un vettore  $\underline{v} \in V$ ,  $\underline{v} \neq \underline{0}$  tale che  $q(\underline{v}) < 0 \iff \iota_- = 0$ . Analogamente  $\varphi$  è semidefinito negativo  $\iff \iota_+ = 0$ .

► Se  $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k$  sono tutti i vettori di una base ortogonale  $\mathcal{B}$  con forma quadratica nulla, si osserva che  $W = \text{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k)$  altro non è che  $V^\perp$  stesso.

Infatti, come visto anche nella dimostrazione del teorema di Sylvester reale, vale che  $\dim W = \dim \text{Ker}(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = \dim V^\perp$ . Sia allora la base  $\mathcal{B} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k, \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n\}$  un'estensione di  $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k\}$ . Se  $\underline{w} \in W$  e  $\underline{v} \in V$ ,  $\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = \varphi(\sum_{i=1}^k \alpha_i \underline{w}_i, \sum_{i=1}^k \beta_i \underline{w}_i + \sum_{i=k+1}^n \beta_i \underline{v}_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_i q(\underline{w}_i) = 0$  (dove  $\alpha_i$  e  $\beta_i \in \mathbb{K}$  rappresentano la  $i$ -esima coordinata di  $\underline{w}$  e  $\underline{v}$  nella base  $\mathcal{B}$ ), e quindi  $W \subseteq V^\perp$ . Si conclude allora, tramite l'uguaglianza dimensionale, che  $W = V^\perp$ .

► Poiché  $\dim \text{Ker}(\varphi) = \iota_0$ , vale in particolare che  $\text{rg}(\varphi) = n - \iota_0 = \iota_+ + \iota_-$  (infatti vale che  $n = \iota_+ + \iota_- + \iota_0$ , dal momento che  $n$  rappresenta il numero di elementi di una base ortogonale).

► Se  $V = U \oplus^\perp W$ , allora  $\iota_+(\varphi) = \iota_+(\varphi|_U) + \iota_+(\varphi|_W)$ . Analogamente vale la stessa cosa per gli altri indici. Infatti, prese due basi ortogonali  $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_W$  di  $U$  e  $W$ , la loro unione  $\mathcal{B}$  è una base ortogonale di  $V$ . Pertanto il numero di vettori della base  $\mathcal{B}$  con forma quadratica positiva è esattamente  $\iota_+(\varphi|_U) + \iota_+(\varphi|_W)$ .

► In generale, se  $W$  è un sottospazio di  $V$ , vale che  $\iota_+(\varphi) \geq \iota_+(\varphi|_W)$ . Infatti, se  $U$  è un sottospazio di  $W$  di dimensione  $\iota_+(\varphi|_W)$  tale che  $(\varphi|_W)|_U > 0$ , allora  $U$  è in particolare un sottospazio di  $V$  tale che  $\varphi|_U > 0$ . Pertanto, per definizione, essendo  $\iota_+(\varphi)$  la dimensione del massimo sottospazio su cui  $\varphi$ , ristretto ad esso, è definito positivo, deve valere che  $\iota_+(\varphi) \geq \iota_+(\varphi|_W)$ . Analogamente,  $\iota_-(\varphi) \geq \iota_-(\varphi|_W)$ .

### 1.5.2.1 Classificazione delle segnature per $n = 1, 2, 3$

Sia  $\mathcal{B}$  una base di Sylvester per  $\varphi$ . Sia  $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ . Si indica con  $x, y$  e  $z$  le tre coordinate di  $\underline{v} \in V$  secondo la base  $\mathcal{B}$ .

( $n = 1$ ) Vi sono solo tre possibili matrici per  $A$ :



## 1 Introduzione al prodotto scalare

- $A = (0)$ , con  $\sigma = (0, 0, 1)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 0$  e  $\text{CI}(\varphi) = V$ ,
- $A = (1)$ , con  $\sigma = (1, 0, 0)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 1$  e  $\text{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$ ,
- $A = (-1)$ , con  $\sigma = (0, 1, 0)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 1$  e  $\text{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$ .

( $n = 2$ ) Vi sono sei possibili matrici per  $A$ :

- $A = 0$ , con  $\sigma = (0, 0, 2)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 0$  e  $\text{CI}(\varphi) = V$ ,
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , con  $\sigma = (1, 0, 1)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 1$  e  $\text{CI}(\varphi) = \{x = 0 \mid \underline{v} \in V\} = V^\perp$ ,
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , con  $\sigma = (0, 1, 1)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 1$  e  $\text{CI}(\varphi) = \{x = 0 \mid \underline{v} \in V\} = V^\perp$ ,
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , con  $\sigma = (1, 1, 0)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 2$  e  $\text{CI}(\varphi) = \{x^2 = y^2 \mid \underline{v} \in V\}$ ,
- $A = I_2$ , con  $\sigma = (2, 0, 0)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 2$  e  $\text{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$ ,
- $A = -I_2$ , con  $\sigma = (0, 2, 0)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 2$  e  $\text{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$ .

Si osserva in particolare che  $\det(A) = -1 \iff \sigma = (1, 1, 0)$ . Pertanto se  $M$  è una matrice associata al prodotto scalare  $\varphi$  in una base  $\mathcal{B}'$ ,  $\det(M) < 0 \iff \sigma = (1, 1, 0)$ .

( $n = 3$ ) Se  $A$  contiene almeno uno zero nella diagonale, si può studiare  $A$  riconducendosi al caso  $n = 2$ , considerando la matrice  $A_{1,2}^{1,2}$ , e incrementando di uno l'indice di nullità di  $\varphi$  (eventualmente considerando anche come varia il cono isotropo). Altrimenti  $A$  può essere rappresentato dalle seguenti quattro matrici:

- $A = I_3$ , con  $\sigma = (3, 0, 0)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 3$  e  $\text{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$ ,
- $A = -I_3$ , con  $\sigma = (0, 3, 0)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 3$  e  $\text{CI}(\varphi) = \{\underline{0}\}$ ,
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , con  $\sigma = (2, 1, 0)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 3$  e  $\text{CI}(\varphi) = \{x^2 + y^2 = z^2 \mid \underline{v} \in V\}$ ,
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , con  $\sigma = (1, 2, 0)$ ,  $\text{rg}(\varphi) = 3$  e  $\text{CI}(\varphi) = \{y^2 + z^2 = x^2 \mid \underline{v} \in V\}$ .

Si osserva infine che, se  $V = \mathbb{R}^3$  e  $\mathcal{B}$  ne è la base canonica, i coni isotropi delle ultime due matrici rappresentano proprio due coni nello spazio tridimensionale.

### 1.5.2.2 Metodo di Jacobi per il calcolo della segnatura

**Proposizione 1.5.** Sia  $\mathbb{K}$  un campo ordinato i cui elementi positivi sono tutti quadrati (e.g.  $\mathbb{R}$ ). Sia  $W$  un sottospazio di  $V$  di dimensione  $k$ . Sia  $W'$  un sottospazio di  $V$  di dimensione  $k + 1$ . Sia  $\sigma(\varphi|_W) = (p, q, 0)$ , con  $p, q \in \mathbb{N}$  e siano  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  due basi di  $W$  e  $W'$ . Siano  $B = M_{\mathcal{B}}(\varphi|_W)$  e  $B' = M_{\mathcal{B}'}(\varphi|_W)$ .

Sia  $d := \frac{\det(B')}{\det(B)}$ . Allora vale che:

$$\sigma(\varphi|_{W'}) = \begin{cases} (p + 1, q, 0) & \text{se } d > 0, \\ (p, q + 1, 0) & \text{se } d < 0, \\ (p, q, 1) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Dalle precedenti osservazioni, vale che  $\iota_+(\varphi|_{W'}) \geq \iota_+(\varphi|_W)$  e che  $\iota_-(\varphi|_{W'}) \geq \iota_-(\varphi|_W)$ . Inoltre  $\varphi|_W$  è non degenere dal momento che  $\iota_0(\varphi|_W) = 0$ , e pertanto  $p + q = \text{rg}(\varphi|_W) = k$ .

Siano ora  $\mathcal{B}_\perp$  e  $\mathcal{B}'_\perp$  due basi di Sylvester di  $W$  e  $W'$ . Siano  $A = M_{\mathcal{B}_\perp}(\varphi|_W)$  e  $A' = M_{\mathcal{B}'_\perp}(\varphi|_W)$ . Allora  $\det(A) = (-1)^p(-1)^q$ , mentre  $\det(A') = (-1)^p(-1)^q d'$ , dove  $d' \in \{-1, 0, 1\}$ . Allora  $\det(A') = \det(A)d' \implies d' = \frac{\det(A')}{\det(A)}$ , dal momento che  $\det(A) \neq 0$ , essendo  $\varphi|_W$  non degenere.

In particolare,  $\sigma(\varphi|_{W'}) = (p, q, 1)$  se e solo se  $\det(A') = 0 \implies d' = 0$ . Dal momento che  $\det(A') = 0 \iff \det(B') = 0$ ,  $d' = 0 \iff d = 0$ . Pertanto si conclude che  $\sigma(\varphi|_{W'}) = (p, q, 1) \iff d = 0$ .

Al contrario,  $\sigma(\varphi|_{W'}) = (p + 1, q, 0)$  se e solo se  $d' = 1$ , ossia se e solo se  $\det(A')$  e  $\det(A)$  sono concordi di segno. Dal momento che il segno è un invariante del cambiamento di base per la matrice associata a  $\varphi$ ,  $d' = 1$  se e solo se  $\det(B)$  e  $\det(B')$  sono concordi di segno, ossia se e solo se  $d > 0$ . Pertanto  $\sigma(\varphi|_{W'}) = (p + 1, q, 0) \iff d > 0$ . Analogamente si verifica che  $\sigma(\varphi|_{W'}) = (p, q + 1, 0) \iff d < 0$ , da cui la tesi.  $\square$

**Algoritmo 1.2** (metodo di Jacobi). Sia  $\mathcal{B}$  una base di  $V$  e sia  $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ . Se il determinante di ogni minore di testa<sup>3</sup> di  $A$  (ossia dei minori della forma  $A_{1, \dots, i}^{1, \dots, i}$ , con  $1 \leq i \leq n - 1$ ) è diverso da zero, è possibile applicare il **metodo di Jacobi** per il calcolo della segnatura di  $\varphi$ .

Sia  $d_i = \det \left( A_{1, \dots, i}^{1, \dots, i} \right) \forall 1 \leq i \leq n$  e si ponga  $d_0 := 1$ . Allora, per la *Proposizione 1.5*,  $\iota_+$  corrisponde al numero di permanenze del segno tra elementi consecutivi (escludendo 0) di

<sup>3</sup>In realtà il metodo si estende ad ogni successione di minori coerente con un'estensione di base (i.e. i minori principali di  $A$ ).

$(d_i)$ , mentre  $\iota_-$  corrisponde al numero di variazioni del segno (anche stavolta escludendo 0). Infine  $\iota_0$  può valere solo 0 o 1, dove  $\iota_0 = 1 \iff \det(A) = 0$ .

**Esempio.** Sia  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in M(3, \mathbb{R})$ .

Si calcola la segnatura di  $\varphi_A$  mediante il metodo di Jacobi. Poiché  $A$  è la matrice associata di  $\varphi_A$  nella base canonica di  $\mathbb{R}^3$ , si può applicare il metodo di Jacobi direttamente su  $A$ .

Si calcola allora la successione dei  $d_i$ :

1.  $d_1 = \det(1) = 1$ ,
2.  $d_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$ ,
3.  $d_3 = \det(A) = (8 - 1) - 4 = 3$ .

Dal momento che vi sono tre permanenze di segno, si conclude che  $\sigma(\varphi_A) = (3, 0, 0)$ , ossia che  $\varphi_A$  è definito positivo.

### 1.5.2.3 Criterio di Sylvester per la definitezza di un prodotto scalare

**Proposizione 1.6** (criterio di Sylvester per i prodotti definiti). Sia  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Sia  $\mathcal{B}$  una base di  $V$ , e sia  $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ . Sia  $d_i = \det \begin{pmatrix} A_{1, \dots, i}^{1, \dots, i} \end{pmatrix}$ . Allora  $\varphi$  è definito positivo se e solo se  $d_i > 0 \forall 1 \leq i \leq n$ . Analogamente  $\varphi$  è definito negativo se e solo se  $(-1)^i d_i > 0 \forall 1 \leq i \leq n$ .

*Dimostrazione.* Si osserva che  $\varphi$  è definito positivo se e solo se  $\iota_+ = n$ . Pertanto, per il *metodo di Jacobi*,  $\varphi$  è definito positivo se e solo se vi sono solo permanenze di segno tra elementi consecutivi nella successione  $(d_i)$ , e quindi se e solo se  $d_i > 0 \forall 1 \leq i \leq n$ . Analogamente  $\varphi$  è definito negativo se e solo se  $\iota_- = n$ , e quindi se e solo se vi sono solo variazioni di segno  $\iff d_i > 0$  se  $i$  è pari e  $d_i < 0$  se  $i$  è dispari  $\iff (-1)^i d_i > 0, \forall 1 \leq i \leq n$ .  $\square$

### 1.5.2.4 Sottospazi isotropi e indice di Witt

**Definizione** (sottospazio isotropo). Sia  $W$  un sottospazio di  $V$ . Allora si dice che  $W$  è un **sottospazio isotropo** di  $V$  se  $\varphi|_W = 0$ .

**Osservazione.**

- ▶  $V^\perp$  è un sottospazio isotropo di  $V$ .
- ▶  $\underline{v}$  è un vettore isotropo  $\iff W = \text{Span}(\underline{v})$  è un sottospazio isotropo di  $V$ .
- ▶  $W \subseteq V$  è isotropo  $\iff W \subseteq W^\perp$ .

**Proposizione 1.7.** Sia  $\varphi$  non degenere. Se  $W$  è un sottospazio isotropo di  $V$ , allora  $\dim W \leq \frac{1}{2} \dim V$ .

*Dimostrazione.* Poiché  $W$  è un sottospazio isotropo di  $V$ , vale che  $W \subseteq W^\perp$ . Allora vale che:

$$\dim W \leq \dim W^\perp. \quad (1.3)$$

Inoltre, dal momento che  $\varphi$  è non degenere, vale anche che:

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V \implies \dim W^\perp = \dim V - \dim W. \quad (1.4)$$

Sostituendo allora l'equazione (1.4) nella disuguaglianza (1.3), si ottiene che  $\dim W \leq \frac{1}{2} \dim V$ , ossia la tesi.  $\square$

**Definizione** (indice di Witt). Si definisce l'**indice di Witt**  $W(\varphi)$  di  $(V, \varphi)$  come la massima dimensione di un sottospazio isotropo di  $V$ .

**Osservazione.**

- Se  $\varphi > 0$  o  $\varphi < 0$ ,  $W(\varphi) = 0$ . Infatti ogni sottospazio non nullo  $W$  di  $V$  non ammette vettori isotropi, da cui si deduce che  $\varphi|_W \neq 0$ .
- Se  $\varphi$  è non degenere, per la *Proposizione 1.7*, vale che  $W(\varphi) \leq \frac{1}{2} \dim V$ .

**Proposizione 1.8.** Sia  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  e sia  $\varphi$  non degenere. Allora  $W(\varphi) = \min\{\iota_+(\varphi), \iota_-(\varphi)\}$ .

*Dimostrazione.* Senza perdita di generalità si assuma  $\iota_-(\varphi) \leq \iota_+(\varphi)$  (il caso  $\iota_-(\varphi) > \iota_+(\varphi)$  è analogo). Sia  $W$  un sottospazio con  $\dim W > \iota_-(\varphi)$ . Sia  $W^+$  un sottospazio con  $\dim W^+ = \iota_+(\varphi)$  e  $\varphi|_{W^+} > 0$ . Allora, per la formula di Grassmann,  $n \geq \dim(W+W^+) = \dim W + \dim W^+ - \dim(W \cap W^+) > n - \dim(W \cap W^+) \implies \dim(W \cap W^+) > 0$ . Quindi  $\exists \underline{w} \in W$ ,  $\underline{w} \neq \underline{0}$  tale che  $\varphi(\underline{w}, \underline{w}) > 0$ , da cui si ricava che  $W$  non è isotropo. Pertanto  $W(\varphi) \leq \iota_-(\varphi)$ .

Sia  $a := \iota_+(\varphi)$  e sia  $b := \iota_-(\varphi)$ . Sia ora  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_a, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_b\}$  una base di Sylvester per  $\varphi$ . Siano  $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_a$  tali che  $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) = 1$  con  $1 \leq i \leq a$ . Analogamente siano  $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_b$  tali che  $\varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_i) = -1$  con  $1 \leq i \leq b$ . Detta allora  $\mathcal{B}' = \{\underline{v}'_1 := \underline{v}_1 + \underline{w}_1, \dots, \underline{v}'_b := \underline{v}_b + \underline{w}_b\}$ , sia  $W = \text{Span}(\mathcal{B}')$ .

Si osserva che  $\mathcal{B}'$  è linearmente indipendente, e dunque che  $\dim W = \iota_-$ . Inoltre  $\varphi(\underline{v}'_i, \underline{v}'_j) = \varphi(\underline{v}_i + \underline{w}_i, \underline{v}_j + \underline{w}_j)$ . Se  $i \neq j$ , allora  $\varphi(\underline{v}'_i, \underline{v}'_j) = 0$ , dal momento che i vettori di  $\mathcal{B}$  sono a due a due ortogonali tra loro. Se invece  $i = j$ , allora  $\varphi(\underline{v}'_i, \underline{v}'_j) = \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i) + \varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_i) = 1 - 1 = 0$ . Quindi  $M_{\mathcal{B}'}(\varphi|_W) = 0$ , da cui si conclude che  $\varphi|_W = 0$ . Pertanto  $W(\varphi) \geq \iota_-(\varphi)$ , e quindi si conclude che  $W(\varphi) = \iota_-(\varphi)$ , da cui la tesi.  $\square$



## 2 Prodotti hermitiani, spazi euclidei e teorema spettrale (non indicizzato)

**Nota.** Nel corso del documento, per  $V$  si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita  $n$  e per  $\varphi$  un suo prodotto, hermitiano o scalare dipendentemente dal contesto.

**Definizione.** (prodotto hermitiano) Sia  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Una mappa  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  si dice **prodotto hermitiano** se:

- (i)  $\varphi$  è  $\mathbb{C}$ -lineare nel secondo argomento, ossia se  $\varphi(\underline{v}, \underline{u} + \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w})$  e  $\varphi(\underline{v}, a\underline{w}) = a \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ ,
- (ii)  $\varphi(\underline{u}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{u})}$ .

**Definizione.** (prodotto hermitiano canonico in  $\mathbb{C}^n$ ) Si definisce **prodotto hermitiano canonico** di  $\mathbb{C}^n$  il prodotto  $\varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  tale per cui, detti  $\underline{v} = (z_1 \cdots z_n)^\top$  e  $\underline{w} = (w_1 \cdots w_n)^\top$ ,  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \bar{z}_i w_i$ .

**Osservazione.**

- ▶  $\varphi(\underline{u} + \underline{w}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u} + \underline{w})} = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w})} = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{u})} + \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})} = \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + \varphi(\underline{u}, \underline{v})$ , ossia  $\varphi$  è additiva anche nel primo argomento.
- ▶  $\varphi(a\underline{v}, \underline{w}) = \overline{\varphi(\underline{w}, a\underline{v})} = \overline{a \varphi(\underline{w}, \underline{v})} = \bar{a} \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ .
- ▶  $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{v})}$ , e quindi  $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$ .
- ▶ Sia  $\underline{v} = \sum_{i=1}^n x_i \underline{v}_i$  e sia  $\underline{w} = \sum_{i=1}^n y_i \underline{v}_i$ , allora  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{x}_i y_j \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j)$ .
- ▶  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \iff \varphi(\underline{w}, \underline{v}) = 0$ .

**Proposizione 2.1.** Data la forma quadratica  $q : V \rightarrow \mathbb{R}$  del prodotto hermitiano  $\varphi$  tale che  $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$ , tale forma quadratica individua univocamente il prodotto hermitiano  $\varphi$ .

*Dimostrazione.* Innanzitutto si osserva che:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}}{2} + \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{w}) - \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}}{2}.$$

Si considerano allora le due identità:

$$q(\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \overline{\varphi(\underline{w}, \underline{v})} = 2 \Re(\varphi(\underline{v}, \underline{w})),$$

$$q(i\underline{v} + \underline{w}) - q(\underline{v}) - q(\underline{w}) = -i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}) - \overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}) = 2 \Im(\varphi(\underline{v}, \underline{w})),$$

da cui si conclude che il prodotto  $\varphi$  è univocamente determinato dalla sua forma quadratica.  $\square$

**Definizione.** Si definisce **matrice aggiunta** di  $A \in M(n, \mathbb{K})$  la matrice coniugata della trasposta di  $A$ , ossia:

$$A^* = \overline{A^\top} = \overline{A}^\top.$$

**Osservazione.** Per quanto riguarda la matrice aggiunta valgono le principali proprietà della matrice trasposta:

- $(A + B)^* = A^* + B^*$ ,
- $(AB)^* = B^*A^*$ ,
- $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ , se  $A$  è invertibile.

**Definizione.** (matrice associata del prodotto hermitiano) Analogamente al caso del prodotto scalare, data una base  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  si definisce come **matrice associata del prodotto hermitiano**  $\varphi$  la matrice  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(v_i, v_j))_{i,j=1-n}$ .

**Osservazione.** Si osserva che, analogamente al caso del prodotto scalare, vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}.$$

**Proposizione 2.2.** (formula del cambiamento di base per i prodotto hermitiani) Siano  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  due basi di  $V$ . Allora vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_V).$$

*Dimostrazione.* Siano  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  e  $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$ . Allora  $\varphi(w_i, w_j) = [w_i]_{\mathcal{B}'}^* M_{\mathcal{B}'}(\varphi) [w_j]_{\mathcal{B}'}$ .  
 $[w_i]_{\mathcal{B}'}^* M_{\mathcal{B}'}(\varphi) [w_j]_{\mathcal{B}'} = \left( M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)^i \right)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)^j = \left( M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_V) \right)_i^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\text{Id}_V)^j$ ,  
 da cui si ricava l'identità desiderata.  $\square$

**Definizione.** (radicale di un prodotto hermitiano) Analogamente al caso del prodotto scalare, si definisce il **radicale** del prodotto  $\varphi$  come il seguente sottospazio:

$$V^\perp = \{ \underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \ \forall \underline{w} \in V \}.$$

**Proposizione 2.3.** Sia  $\mathcal{B}$  una base di  $V$  e  $\varphi$  un prodotto hermitiano. Allora  $V^\perp = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi))$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  e sia  $\underline{v} \in V^\perp$ . Siano  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  tali che  $\underline{v} = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ . Allora, poiché  $\underline{v} \in V^\perp$ ,  $0 = \varphi(v_i, \underline{v}) = a_1 \varphi(v_i, v_1) + \dots + a_n \varphi(v_i, v_n) = M_i[\underline{v}]_{\mathcal{B}}$ , da cui si ricava che  $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ , e quindi che  $V^\perp \subseteq [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi))$ .

Sia ora  $\underline{v} \in V$  tale che  $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ . Allora, per ogni  $\underline{w} \in V$ ,  $\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = [\underline{w}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{v}]_{\mathcal{B}} = [\underline{w}]_{\mathcal{B}}^* 0 = 0$ , da cui si conclude che  $\underline{v} \in V^\perp$ , e quindi che  $V^\perp \supseteq [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi))$ , da cui  $V^\perp = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi))$ , ossia la tesi.  $\square$

<sup>1</sup>Stavolta non è sufficiente considerare la mappa  $f : V \rightarrow V^*$  tale che  $f(\underline{v}) = [\underline{w} \mapsto \varphi(\underline{v}, \underline{w})]$ , dal momento che  $f$  non è lineare, bensì antilineare, ossia  $f(a\underline{v}) = \overline{a}f(\underline{v})$ .

**Osservazione.** Come conseguenza della proposizione appena dimostrata, valgono le principali proprietà già viste per il prodotto scalare.

- ▶  $\det(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = 0 \iff V^{\perp} \neq \{0\} \iff \varphi$  è degenere,
- ▶ Vale il teorema di Lagrange, e quindi quello di Sylvester, benché con alcune accortezze: si introduce, come nel caso di  $\mathbb{R}$ , il concetto di segnatura, che diventa l'invariante completo della nuova congruenza hermitiana, che ancora una volta si dimostra essere una relazione di equivalenza.
- ▶ Come mostrato nei momenti finali del documento (vd. *Esercizio 3*), vale la formula delle dimensioni anche nel caso del prodotto hermitiano.

**Definizione.** (restrizione ai reali di uno spazio) Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  con base  $\mathcal{B}$ . Si definisce allora lo spazio  $V_{\mathbb{R}}$ , detto **spazio di restrizione su  $\mathbb{R}$**  di  $V$ , come uno spazio su  $\mathbb{R}$  generato da  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B} \cup i\mathcal{B}$ .

**Esempio.** Si consideri  $V = \mathbb{C}^3$ . Una base di  $\mathbb{C}^3$  è chiaramente  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ . Allora  $V_{\mathbb{R}}$  sarà uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  generato dai vettori  $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, i\underline{e}_1, i\underline{e}_2, i\underline{e}_3\}$ .

**Osservazione.** Si osserva che lo spazio di restrizione su  $\mathbb{R}$  e lo spazio di partenza condividono lo stesso insieme di vettori. Infatti,  $\text{Span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{B}) = \text{Span}_{\mathbb{R}}(\mathcal{B} \cup i\mathcal{B})$ . Ciononostante,  $\dim V_{\mathbb{R}} = 2 \dim V$ , se  $\dim V \in \mathbb{N}$ .

**Definizione.** (complessificazione di uno spazio) Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ . Si definisce allora lo **spazio complessificato**  $V_{\mathbb{C}} = V \times V$  su  $\mathbb{C}$  con le seguenti operazioni:

- $(\underline{v}, \underline{w}) + (\underline{v}', \underline{w}') = (\underline{v} + \underline{v}', \underline{w} + \underline{w}')$ ,
- $(a + bi)(\underline{v}, \underline{w}) = (a\underline{v} - b\underline{w}, a\underline{w} + b\underline{v})$ .

**Osservazione.** La costruzione dello spazio complessificato emula in realtà la costruzione di  $\mathbb{C}$  come spazio  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Infatti se  $z = (c, d)$ , vale che  $(a + bi)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ , mentre si mantiene l'usuale operazione di addizione. In particolare si può identificare l'insieme  $V \times \{0\}$  come  $V$ , mentre  $\{0\} \times V$  viene identificato come l'insieme degli immaginari  $iV$  di  $V_{\mathbb{C}}$ . Infine, moltiplicare per uno scalare reale un elemento di  $V \times \{0\}$  equivale a moltiplicare la sola prima componente con l'usuale operazione di moltiplicazione di  $V$ . Allora, come accade per  $\mathbb{C}$ , si può sostituire la notazione  $(\underline{v}, \underline{w})$  con la più comoda notazione  $\underline{v} + i\underline{w}$ .

**Osservazione.** Sia  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  una base di  $V$ . Innanzitutto si osserva che  $(a + bi)(\underline{v}, 0) = (a\underline{v}, b\underline{v})$ . Pertanto si può concludere che  $\mathcal{B} \times \{0\}$  è una base dello spazio complessificato  $V_{\mathbb{C}}$  su  $\mathbb{C}$ .

<sup>2</sup>Si sarebbe potuto ottenere lo stesso risultato utilizzando il teorema delle torri algebriche:  $[V_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}] = [V : \mathbb{C}][\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2[V : \mathbb{C}]$ .



2 Prodotti hermitiani, spazi euclidei e teorema spettrale (non indicizzato)

Infatti, se  $(a_1 + b_1 i)(\underline{v}_1, \underline{0}) + \dots + (a_n + b_n i)(\underline{v}_n, \underline{0}) = (\underline{0}, \underline{0})$ , allora  $(a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n, b_1 \underline{v}_1 + \dots + b_n \underline{v}_n) = (\underline{0}, \underline{0})$ . Poiché però  $\mathcal{B}$  è linearmente indipendente per ipotesi, l'ultima identità implica che  $a_1 = \dots = a_n = b_1 = \dots = b_n = 0$ , e quindi che  $\mathcal{B} \times \{\underline{0}\}$  è linearmente indipendente.

Inoltre  $\mathcal{B} \times \{\underline{0}\}$  genera  $V_{\mathbb{C}}$ . Se infatti  $\underline{v} = (\underline{u}, \underline{w})$ , e vale che:

$$\underline{u} = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n, \quad \underline{w} = b_1 \underline{v}_1 + \dots + b_n \underline{v}_n,$$

allora  $\underline{v} = (a_1 + b_1 i)(\underline{v}_1, \underline{0}) + \dots + (a_n + b_n i)(\underline{v}_n, \underline{0})$ . Quindi  $\dim V_{\mathbb{C}} = \dim V$ .

**Definizione.** Sia  $f$  un'applicazione  $\mathbb{C}$ -lineare di  $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$ . Allora si definisce la **restrizione su  $\mathbb{R}$**  di  $f$ , detta  $f_{\mathbb{R}} : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$ , in modo tale che  $f_{\mathbb{R}}(\underline{v}) = f(\underline{v})$ .

**Osservazione.** Sia  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  una base di  $V$  su  $\mathbb{C}$ . Sia  $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ . Si osserva allora che, se  $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup i\mathcal{B}$  e  $A = A' + iA''$  con  $A', A'' \in M(n, \mathbb{R})$ , vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}'}(f_{\mathbb{R}}) = \left( \begin{array}{c|c} A' & -A'' \\ \hline A'' & A' \end{array} \right).$$

Infatti, se  $f(\underline{v}_i) = (a_1 + b_1 i)\underline{v}_1 + \dots + (a_n + b_n i)\underline{v}_n$ , vale che  $f_{\mathbb{R}}(\underline{v}_i) = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n + b_1 (i\underline{v}_1) + \dots + b_n (i\underline{v}_n)$ , mentre  $f_{\mathbb{R}}(i\underline{v}_i) = if(\underline{v}_i) = -b_1 \underline{v}_1 + \dots - b_n \underline{v}_n + a_1 (i\underline{v}_1) + \dots + a_n (i\underline{v}_n)$ .

**Definizione.** Sia  $f$  un'applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare di  $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ . Allora si definisce la **complessificazione** di  $f$ , detta  $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ , in modo tale che  $f_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}) = f(\underline{v}) + if(\underline{w})$ .

**Osservazione.** Si verifica infatti che  $f_{\mathbb{C}}$  è  $\mathbb{C}$ -lineare.

- $f_{\mathbb{C}}((\underline{v}_1 + i\underline{w}_1) + (\underline{v}_2 + i\underline{w}_2)) = f_{\mathbb{C}}((\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + i(\underline{w}_1 + \underline{w}_2)) = f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + if(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) = (f(\underline{v}_1) + if(\underline{w}_1)) + (f(\underline{v}_2) + if(\underline{w}_2)) = f_{\mathbb{C}}(\underline{v}_1 + i\underline{w}_1) + f_{\mathbb{C}}(\underline{v}_2 + i\underline{w}_2)$ .
- $f_{\mathbb{C}}((a + bi)(\underline{v} + i\underline{w})) = f_{\mathbb{C}}(a\underline{v} - b\underline{w} + i(a\underline{w} + b\underline{v})) = f(a\underline{v} - b\underline{w}) + if(a\underline{w} + b\underline{v}) = af(\underline{v}) - bf(\underline{w}) + i(af(\underline{w}) + bf(\underline{v})) = (a + bi)(f(\underline{v}) + if(\underline{w})) = (a + bi)f_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w})$ .

**Proposizione 2.4.** Sia  $f_{\mathbb{C}}$  la complessificazione di  $f \in \text{End}(V)$ , dove  $V$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ . Sia inoltre  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  una base di  $V$ . Valgono allora i seguenti risultati:

- (i)  $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}|_V$  assume gli stessi valori di  $f$ ,
- (ii)  $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f) \in M(n, \mathbb{R})$ ,

$$(iii) M_{\mathcal{B} \cup i\mathcal{B}}((f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}) = \left( \begin{array}{c|c} M_{\mathcal{B}}(f) & 0 \\ \hline 0 & M_{\mathcal{B}}(f) \end{array} \right).$$

*Dimostrazione.* Si dimostrano i risultati separatamente.

2 Prodotti hermitiani, spazi euclidei e teorema spettrale (non indicizzato)

- (i) Si osserva che  $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}(\underline{v}_i) = f_{\mathbb{C}}(\underline{v}_i) = f(\underline{v}_i)$ . Dal momento che  $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$  è  $\mathbb{R}$ -lineare, si conclude che  $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$  assume gli stessi valori di  $f$ .
- (ii) Dal momento che  $\mathcal{B}$ , nell'identificazione di  $(\underline{v}, \underline{0})$  come  $\underline{v}$ , è sempre una base di  $V_{\mathbb{C}}$ , e  $f_{\mathbb{C}}(\underline{v}_i) = f(\underline{v}_i)$ , chiaramente  $[f_{\mathbb{C}}(\underline{v}_i)]_{\mathcal{B}} = [f(\underline{v}_i)]_{\mathcal{B}}$ , e quindi  $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f)$ , dove si osserva anche che  $M_{\mathcal{B}}(f) \in M(n, \mathbb{R})$ , essendo  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .
- (iii) Sia  $f(\underline{v}_i) = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n$  con  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Come osservato in (i),  $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}|_{\mathcal{B}} = (f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}|_{\mathcal{B}}$ , e quindi la prima metà di  $M_{\mathcal{B} \cup i\mathcal{B}}((f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}})$  è formata da due blocchi: uno verticale coincidente con  $M_{\mathcal{B}}(f)$  e un altro completamente nullo, dal momento che non compare alcun termine di  $i\mathcal{B}$  nella scrittura di  $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}(\underline{v}_i)$ . Al contrario, per  $i\mathcal{B}$ ,  $(f_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}(i\underline{v}_i) = f_{\mathbb{C}}(i\underline{v}_i) = if(\underline{v}_i) = a_1(i\underline{v}_1) + \dots + a_n(i\underline{v}_n)$ ; pertanto la seconda metà della matrice avrà i due blocchi della prima metà, benché scambiati.

□

**Osservazione.** Dal momento che  $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f)$ ,  $f_{\mathbb{C}}$  e  $f$  condividono lo stesso polinomio caratteristico e vale che  $\text{sp}(f) \subseteq \text{sp}(f_{\mathbb{C}})$ , dove vale l'uguaglianza se e solo se tale polinomio caratteristico è completamente riducibile in  $\mathbb{R}$ . Inoltre, se  $V_{\lambda}$  è l'autospazio su  $V$  dell'autovalore  $\lambda$ , l'autospazio su  $V_{\mathbb{C}}$ , rispetto a  $f_{\mathbb{C}}$ , è invece  $V_{\mathbb{C}\lambda} = V_{\lambda} + iV_{\lambda}$ , la cui dimensione rimane invariata rispetto a  $V_{\lambda}$ , ossia  $\dim V_{\lambda} = \dim V_{\mathbb{C}\lambda}$  (infatti, analogamente a prima, una base di  $V_{\lambda}$  può essere identificata come base anche per  $V_{\mathbb{C}\lambda}$ ).

**Proposizione 2.5.** Sia  $f_{\mathbb{C}}$  la complessificazione di  $f \in \text{End}(V)$ , dove  $V$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ . Sia inoltre  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  una base di  $V$ . Allora un endomorfismo  $\tilde{g} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$  complessifica un endomorfismo  $g \in \text{End}(V) \iff M_{\mathcal{B}}(\tilde{g}) \in M(n, \mathbb{R})$ .

*Dimostrazione.* Se  $\tilde{g}$  complessifica  $g \in \text{End}(V)$ , allora, per la proposizione precedente,  $M_{\mathcal{B}}(\tilde{g}) = M_{\mathcal{B}}(g) \in M(n, \mathbb{R})$ . Se invece  $A = M_{\mathcal{B}}(\tilde{g}) \in M(n, \mathbb{R})$ , si considera  $g = M_{\mathcal{B}}^{-1}(A) \in \text{End}(V)$ . Si verifica facilmente che  $\tilde{g}$  non è altro che il complessificato di tale  $g$ :

- $\tilde{g}(\underline{v}_i) = g(\underline{v}_i)$ , dove l'uguaglianza è data dal confronto delle matrici associate, e quindi  $\tilde{g}|_V = g$ ;
- $\tilde{g}(\underline{v} + i\underline{w}) = \tilde{g}(\underline{v}) + i\tilde{g}(\underline{w}) = g(\underline{v}) + ig(\underline{w})$ , da cui la tesi.

□

**Proposizione 2.6.** Sia  $\varphi$  un prodotto scalare di  $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ . Allora esiste un unico prodotto hermitiano  $\varphi_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$  che estende  $\varphi$  (ossia tale che  $\varphi_{\mathbb{C}}|_{V \times V} = \varphi$ ), il quale assume la stessa segnatura di  $\varphi$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{B}$  una base di Sylvester per  $\varphi$ . Si consideri allora il prodotto  $\varphi_{\mathbb{C}}$  tale che:

$$\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v}_1 + i\underline{w}_1, \underline{v}_2 + i\underline{w}_2) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2) + \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2) + i(\varphi(\underline{v}_1, \underline{w}_2) - \varphi(\underline{w}_1, \underline{v}_2)).$$

Chiaramente  $\varphi_{\mathbb{C}}|_{V \times V} = \varphi$ . Si verifica allora che  $\varphi_{\mathbb{C}}$  è hermitiano:

2 Prodotti hermitiani, spazi euclidei e teorema spettrale (non indicizzato)

- $\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}, (\underline{v}_1 + i\underline{w}_1) + (\underline{v}_2 + i\underline{w}_2)) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}_1 + \underline{w}_2) + i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1 + \underline{w}_2) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}_1 + \underline{v}_2)) = [\varphi(\underline{v}, \underline{v}_1) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}_1) + i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}_1))] + [\varphi(\underline{v}, \underline{v}_2) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}_2) + i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}_2) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}_2))] = \varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}, \underline{v}_1 + i\underline{w}_1) + \varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}, \underline{v}_2 + i\underline{w}_2)$  (additività nel secondo argomento),
- $\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}, (a + bi)(\underline{v}_1 + i\underline{w}_1)) = \varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + i\underline{w}, a\underline{v}_1 - b\underline{w}_1 + i(b\underline{v}_1 + a\underline{w}_1)) = \varphi(\underline{v}, a\underline{v}_1 - b\underline{w}_1) + \varphi(\underline{w}, b\underline{v}_1 + a\underline{w}_1) + i(\varphi(\underline{v}, b\underline{v}_1 + a\underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}, a\underline{v}_1 - b\underline{w}_1)) = a\varphi(\underline{v}, \underline{v}_1) - b\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) + b\varphi(\underline{w}, \underline{v}_1) + a\varphi(\underline{w}, \underline{w}_1) + i(b\varphi(\underline{v}, \underline{v}_1) + a\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) - a\varphi(\underline{w}, \underline{v}_1) + b\varphi(\underline{w}, \underline{w}_1)) = a(\varphi(\underline{v}, \underline{v}_1) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}_1)) - b(\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}_1)) + i(a(\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}_1)) + b(\varphi(\underline{v}, \underline{v}_1) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}_1))) = (a + bi)(\varphi(\underline{v}, \underline{v}_1) + \varphi(\underline{w}, \underline{w}_1) + i(\varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}, \underline{v}_1))) = (a + bi)\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v} + \underline{w}, \underline{v}_1 + i\underline{w}_1)$  (omogeneità nel secondo argomento),
- $\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v}_1 + i\underline{w}_1, \underline{v}_2 + i\underline{w}_2) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2) + \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2) + i(\varphi(\underline{v}_1, \underline{w}_2) - \varphi(\underline{w}_1, \underline{v}_2)) = \overline{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2) + \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2) + i(\varphi(\underline{w}_1, \underline{v}_2) - \varphi(\underline{v}_1, \underline{w}_2))} = \overline{\varphi(\underline{v}_2, \underline{v}_1) + \varphi(\underline{w}_2, \underline{w}_1) + i(\varphi(\underline{v}_2, \underline{w}_1) - \varphi(\underline{w}_2, \underline{v}_1))} = \overline{\varphi_{\mathbb{C}}(\underline{v}_2 + \underline{w}_2, \underline{v}_1 + \underline{w}_1)}$  (coniugio nello scambio degli argomenti).

Ogni prodotto hermitiano  $\tau$  che estende il prodotto scalare  $\varphi$  ha la stessa matrice associata nella base  $\mathcal{B}$ , essendo  $\tau(\underline{v}_i, \underline{v}_i) = \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)$  vero per ipotesi. Pertanto  $\tau$  è unico, e vale che  $\tau = \varphi_{\mathbb{C}}$ . Dal momento che  $M_{\mathcal{B}}(\varphi_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  è una matrice di Sylvester,  $\varphi_{\mathbb{C}}$  mantiene anche la stessa segnatura di  $\varphi$ .  $\square$

**Teorema 2.1.** (di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare) Sia  $V$  uno spazio vettoriale e sia  $\varphi$  un suo prodotto scalare non degenerare. Allora per ogni  $f \in V^*$  esiste un unico  $\underline{v} \in V$  tale che  $f(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \forall \underline{w} \in V$ .

*Dimostrazione.* Si consideri l'applicazione  $a_{\varphi}$ . Poiché  $\varphi$  non è degenerare,  $\text{Ker } a_{\varphi} = V^{\perp} = \{0\}$ , da cui si deduce che  $a_{\varphi}$  è un isomorfismo. Quindi  $\forall f \in V^*$  esiste un unico  $\underline{v} \in V$  tale per cui  $a_{\varphi}(\underline{v}) = f$ , e dunque tale per cui  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_{\varphi}(\underline{v})(\underline{w}) = f(\underline{w}) \forall \underline{w} \in V$ .  $\square$

*Dimostrazione costruttiva.* Sia  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  una base ortogonale di  $V$  per  $\varphi$ . Allora  $\mathcal{B}^*$  è una base di  $V^*$ . In particolare  $f = f(\underline{v}_1)\underline{v}_1^* + \dots + f(\underline{v}_n)\underline{v}_n^*$ . Sia  $\underline{v} = \frac{f(\underline{v}_1)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)}\underline{v}_1 + \dots + \frac{f(\underline{v}_n)}{\varphi(\underline{v}_n, \underline{v}_n)}$ . Detto  $\underline{w} = a_1\underline{v}_1 + \dots + a_n\underline{v}_n$ , si deduce che  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_1f(\underline{v}_1) + \dots + a_nf(\underline{v}_n) = f(\underline{w})$ . Se esistesse  $\underline{v}' \in V$  con la stessa proprietà di  $\underline{v}$ ,  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v} - \underline{v}', \underline{w}) = 0 \forall \underline{w} \in V$ . Si deduce dunque che  $\underline{v} - \underline{v}' \in V^{\perp}$ , contenente solo  $0$  dacché  $\varphi$  è non degenerare; e quindi si conclude che  $\underline{v} = \underline{v}'$ , ossia che esiste solo un vettore con la stessa proprietà di  $\underline{v}$ .  $\square$

**Teorema 2.2.** (di rappresentazione di Riesz per il prodotto hermitiano) Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  e sia  $\varphi$  un suo prodotto hermitiano non degenerare. Allora per ogni  $f \in V^*$  esiste un unico  $\underline{v} \in V$  tale che  $f(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) \forall \underline{w} \in V$ .

## 2 Prodotti hermitiani, spazi euclidei e teorema spettrale (non indicizzato)

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  una base ortogonale di  $V$  per  $\varphi$ . Allora  $\mathcal{B}^*$  è una base di  $V^*$ . In particolare  $f = f(\underline{v}_1)v_1^* + \dots + f(\underline{v}_n)v_n^*$ . Sia  $\underline{v} = \frac{f(\underline{v}_1)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)}\underline{v}_1 + \dots + \frac{f(\underline{v}_n)}{\varphi(\underline{v}_n, \underline{v}_n)}\underline{v}_n$ . Detto  $\underline{w} = a_1\underline{v}_1 + \dots + a_n\underline{v}_n$ , si deduce che  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = a_1f(\underline{v}_1) + \dots + a_nf(\underline{v}_n) = f(\underline{w})$ . Se esistesse  $\underline{v}' \in V$  con la stessa proprietà di  $\underline{v}$ ,  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v} - \underline{v}', \underline{w}) = 0 \forall \underline{w} \in V$ . Si deduce dunque che  $\underline{v} - \underline{v}' \in V^\perp$ , contenente solo  $\underline{0}$  dacché  $\varphi$  è non degenere; e quindi si conclude che  $\underline{v} = \underline{v}'$ , ossia che esiste solo un vettore con la stessa proprietà di  $\underline{v}$ .  $\square$

**Proposizione 2.7.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale con prodotto scalare  $\varphi$  non degenere. Sia  $f \in \text{End}(V)$ . Allora esiste un unico endomorfismo  $f_\varphi^\top : V \rightarrow V$ , detto il **trasposto di  $f$**  e indicato con  $f^\top$  in assenza di ambiguità<sup>3</sup>, tale che:

$$a_\varphi \circ g = f^\top \circ a_\varphi,$$

ossia che:

$$\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(g(\underline{v}), \underline{w}) \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V.$$

*Dimostrazione.* Si consideri  $(f^\top \circ a_\varphi)(\underline{v}) \in V^*$ . Per il teorema di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare, esiste un unico  $\underline{v}'$  tale che  $(f^\top \circ a_\varphi)(\underline{v})(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \implies \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}', \underline{w}) \quad \forall \underline{w} \in V$ . Si costruisce allora una mappa  $f_\varphi^\top : V \rightarrow V$  che associa a  $\underline{v}$  tale  $\underline{v}'$ . Si dimostra che  $f_\varphi^\top$  è un'applicazione lineare, e che dunque è un endomorfismo:

- (i) Siano  $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ . Si deve dimostrare innanzitutto che  $f_\varphi^\top(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f_\varphi^\top(\underline{v}_1) + f_\varphi^\top(\underline{v}_2)$ , ossia che  $\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}_1) + f_\varphi^\top(\underline{v}_2), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, f(\underline{w})) \quad \forall \underline{w} \in V$ .

Si osservano le seguenti identità:

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, f(\underline{w})) &= \varphi(\underline{v}_1, f(\underline{w})) + \varphi(\underline{v}_2, f(\underline{w})) = (*), \\ \varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}_1) + f_\varphi^\top(\underline{v}_2), \underline{w}) &= \varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}_1), \underline{w}) + \varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}_2), \underline{w}) = (*), \end{aligned}$$

da cui si deduce l'uguaglianza desiderata, essendo  $f_\varphi^\top(\underline{v}_1 + \underline{v}_2)$  l'unico vettore di  $V$  con la proprietà enunciata dal teorema di rappresentazione di Riesz.

- (ii) Sia  $\underline{v} \in V$ . Si deve dimostrare che  $f_\varphi^\top(a\underline{v}) = af_\varphi^\top(\underline{v})$ , ossia che  $\varphi(af_\varphi^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(a\underline{v}, f(\underline{w})) \quad \forall a \in \mathbb{K}, \underline{w} \in V$ . È sufficiente moltiplicare per  $a$  l'identità  $\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$ . Analogamente a prima, si deduce che  $f_\varphi^\top(a\underline{v}) = af_\varphi^\top(\underline{v})$ , essendo  $f_\varphi^\top(a\underline{v})$  l'unico vettore di  $V$  con la proprietà enunciata dal teorema di rappresentazione di Riesz.

---

<sup>3</sup>Si tenga infatti in conto della differenza tra  $f_\varphi^\top : V \rightarrow V$ , di cui si discute nell'enunciato, e  $f^\top : V^* \rightarrow V^*$  che invece è tale che  $f^\top \circ g = g \circ f$ .

Infine si dimostra che  $f_\varphi^\top$  è unico. Sia infatti  $g$  un endomorfismo di  $V$  che condivide la stessa proprietà di  $f_\varphi^\top$ . Allora  $\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(g(\underline{v}), \underline{w}) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ , da cui si deduce che  $\varphi(f_\varphi^\top(\underline{v}) - g(\underline{v}), \underline{w}) = 0 \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ , ossia che  $f_\varphi^\top(\underline{v}) - g(\underline{v}) \in V^\perp \forall \underline{v} \in V$ . Tuttavia  $\varphi$  è non degenere, e quindi  $V^\perp = \{0\}$ , da cui si deduce che deve valere l'identità  $f_\varphi^\top(\underline{v}) = g(\underline{v}) \forall \underline{v} \in V$ , ossia  $g = f_\varphi^\top$ .  $\square$

**Proposizione 2.8.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$  e sia  $\varphi$  un suo prodotto hermitiano. Allora esiste un'unica mappa<sup>4</sup>  $f^* : V \rightarrow V$ , detta **aggiunto di  $f$** , tale che  $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\underline{v} \in V$ . Si consideri il funzionale  $\sigma$  tale che  $\sigma(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w}))$ . Per il teorema di rappresentazione di Riesz per il prodotto scalare esiste un unico  $\underline{v}' \in V$  tale per cui  $\varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \sigma(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}', \underline{w})$ . Si costruisce allora una mappa  $f^*$  che associa  $\underline{v}$  a tale  $\underline{v}'$ .

Si dimostra infine che la mappa  $f^*$  è unica. Sia infatti  $\mu : V \rightarrow V$  che condivide la stessa proprietà di  $f^*$ . Allora  $\varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\mu(\underline{v}), \underline{w}) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ , da cui si deduce che  $\varphi(f^*(\underline{v}) - \mu(\underline{v}), \underline{w}) = 0 \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ , ossia che  $f^*(\underline{v}) - \mu(\underline{v}) \in V^\perp \forall \underline{v} \in V$ . Tuttavia  $\varphi$  è non degenere, e quindi  $V^\perp = \{0\}$ , da cui si deduce che deve valere l'identità  $f^*(\underline{v}) = \mu(\underline{v}) \forall \underline{v} \in V$ , ossia  $\mu = f^*$ .  $\square$

**Osservazione.** L'operazione di trasposizione di un endomorfismo sul prodotto scalare non degenere  $\varphi$  è un'involuzione. Infatti valgono le seguenti identità  $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ :

$$\begin{cases} \varphi(\underline{w}, f^\top(\underline{v})) = \varphi(f^\top(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})), \\ \varphi(\underline{w}, f^\top(\underline{v})) = \varphi((f^\top)^\top(\underline{w}), \underline{v}) = \varphi(\underline{v}, (f^\top)^\top(\underline{w})). \end{cases}$$

Si conclude allora, poiché  $\varphi$  è non degenere, che  $f(\underline{w}) = (f^\top)^\top(\underline{w}) \forall \underline{w} \in V$ , ossia che  $f = (f^\top)^\top$ .

**Osservazione.** Analogamente si può dire per l'operazione di aggiunta per un prodotto hermitiano  $\varphi$  non degenere. Valgono infatti le seguenti identità  $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ :

$$\begin{cases} \overline{\varphi(\underline{w}, f^*(\underline{v}))} = \varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})), \\ \overline{\varphi(\underline{w}, f^*(\underline{v}))} = \overline{\varphi((f^*)^*(\underline{w}), \underline{v})} = \varphi(\underline{v}, (f^*)^*(\underline{w})), \end{cases}$$

da cui si deduce, come prima, che  $f = (f^*)^*$ .

**Definizione.** (base ortonormale) Si definisce **base ortonormale** di uno spazio vettoriale  $V$  su un suo prodotto  $\varphi$  una base ortogonale  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  tale che  $\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_j) = \delta_{ij}$ .

<sup>4</sup>Si osservi che  $f^*$  non è un'applicazione lineare, benché sia invece *antilineare*.

**Proposizione 2.9.** Sia  $\varphi$  un prodotto scalare non degenere di  $V$ . Sia  $f \in \text{End}(V)$ . Allora vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}}(f_{\varphi}^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1} M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi),$$

dove  $\mathcal{B}$  è una base di  $V$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{B}^*$  la base relativa a  $\mathcal{B}$  in  $V^*$ . Per la proposizione precedente vale la seguente identità:

$$a_{\varphi} \circ f_{\varphi}^{\top} = f^{\top} \circ a_{\varphi}.$$

Pertanto, passando alle matrici associate, si ricava che:

$$M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(a_{\varphi}) M_{\mathcal{B}}(f_{\varphi}^{\top}) = M_{\mathcal{B}^*}(f^{\top}) M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(a_{\varphi}).$$

Dal momento che valgono le seguenti due identità:

$$M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(a_{\varphi}) = M_{\mathcal{B}}(\varphi), \quad M_{\mathcal{B}^*}(f^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top},$$

e  $a_{\varphi}$  è invertibile (per cui anche  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  lo è), si conclude che:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f_{\varphi}^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) \implies M_{\mathcal{B}}(f_{\varphi}^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1} M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi),$$

da cui la tesi. □

**Corollario 2.1.** Sia  $\varphi$  un prodotto scalare di  $V$ . Se  $\mathcal{B}$  è una base ortonormale,  $\varphi$  è non degenere e  $M_{\mathcal{B}}(f_{\varphi}^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top}$ .

*Dimostrazione.* Se  $\mathcal{B}$  è una base ortonormale,  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$ . Pertanto  $\varphi$  è non degenere. Allora, per la proposizione precedente:

$$M_{\mathcal{B}}(f_{\varphi}^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1} M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top}.$$

□

**Proposizione 2.10.** Sia  $\varphi$  un prodotto hermitiano non degenere di  $V$ . Sia  $f \in \text{End}(V)$ . Allora vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}}(f_{\varphi}^*) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1} M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi),$$

dove  $\mathcal{B}$  è una base di  $V$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ . Dal momento che  $\varphi$  è non degenere,  $\text{Ker } M_{\mathcal{B}}(\varphi) = V^{\perp} = \{\underline{0}\}$ , e quindi  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  è invertibile.

Dacché allora  $\varphi(f^*(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ , vale la seguente identità:

$$[f^*(\underline{v})]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [f(\underline{w})]_{\mathcal{B}},$$

## 2 Prodotti hermitiani, spazi euclidei e teorema spettrale (non indicizzato)

ossia si deduce che:

$$[\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f^*)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}} = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}.$$

Sostituendo allora a  $\underline{v}$  e  $\underline{w}$  i vettori della base  $\mathcal{B}$ , si ottiene che:

$$\begin{aligned} (M_{\mathcal{B}}(f^*)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi))_{ij} &= [\underline{v}_i]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f^*)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{v}_j]_{\mathcal{B}} = \\ &= [\underline{v}_i]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f) [\underline{v}_j]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f))_{ij}, \end{aligned}$$

e quindi che  $M_{\mathcal{B}}(f^*)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f)$ . Moltiplicando a destra per l'inversa di  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$  e prendendo l'aggiunta di ambo i membri (ricordando che  $M_{\mathcal{B}}(\varphi)^* = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ , essendo  $\varphi$  un prodotto hermitiano), si ricava l'identità desiderata.  $\square$

**Corollario 2.2.** Sia  $\varphi$  un prodotto hermitiano di  $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$ . Se  $\mathcal{B}$  è una base ortonormale,  $\varphi$  è non degenere e  $M_{\mathcal{B}}(f_{\varphi}^*) = M_{\mathcal{B}}(f)^*$ .

*Dimostrazione.* Se  $\mathcal{B}$  è una base ortonormale,  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$ . Pertanto  $\varphi$  è non degenere. Allora, per la proposizione precedente:

$$M_{\mathcal{B}}(f_{\varphi}^*) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^{-1} M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{\mathcal{B}}(f)^*.$$

$\square$

**Nota.** D'ora in poi, nel corso del documento, s'intenderà per  $\varphi$  un prodotto scalare (o eventualmente hermitiano) non degenere di  $V$ .

**Definizione.** (operatori simmetrici) Sia  $f \in \text{End}(V)$ . Si dice allora che  $f$  è **simmetrico** (o *autoaggiunto*) se  $f = f^{\top}$ .

**Definizione.** (applicazioni e matrici ortogonali) Sia  $f \in \text{End}(V)$ . Si dice allora che  $f$  è **ortogonale** se  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$ , ossia se è un'isometria in  $V$ . Sia  $A \in M(n, \mathbb{K})$ . Si dice dunque che  $A$  è **ortogonale** se  $A^{\top} A = A A^{\top} = I_n$ .

**Definizione.** Le matrici ortogonali di  $M(n, \mathbb{K})$  formano un sottogruppo moltiplicativo di  $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ , detto **gruppo ortogonale**, e indicato con  $O_n$ . Il sottogruppo di  $O_n$  contenente solo le matrici con determinante pari a 1 è detto **gruppo ortogonale speciale**, e si denota con  $SO_n$ .

**Osservazione.** Si possono classificare in modo semplice alcuni di questi gruppi ortogonali per  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

- $A \in O_n \implies 1 = \det(I_n) = \det(AA^{\top}) = \det(A)^2 \implies \det(A) = \pm 1$ .
- $A = (a) \in O_1 \iff A^{\top} A = I_1 \iff a^2 = 1 \iff a = \pm 1$ , da cui si ricava che l'unica matrice di  $SO_1$  è (1). Si osserva inoltre che  $O_1$  è abeliano di ordine 2, e quindi che  $O_1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

$$\blacktriangleright A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2 \iff \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab + cd \\ ab + cd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = A^\top A = I_2.$$

Pertanto deve essere soddisfatto il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1, \\ ac + bd = 0. \end{cases}$$

Si ricava dunque che si può identificare  $A$  con le funzioni trigonometriche  $\cos(\theta)$  e  $\sin(\theta)$  con  $\theta \in [0, 2\pi)$  nelle due forme:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (\det(A) = 1, A \in SO_2),$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (\det(A) = -1).$$

**Definizione.** (applicazioni e matrici hermitiane) Sia  $f \in \text{End}(V)$  e si consideri il prodotto hermitiano  $\varphi$ . Si dice allora che  $f$  è **hermitiano** se  $f = f^*$ . Sia  $A \in M(n, \mathbb{C})$ . Si dice dunque che  $A$  è **hermitiana** se  $A = A^*$ .

**Definizione.** (applicazioni e matrici unitarie) Sia  $f \in \text{End}(V)$  e si consideri il prodotto hermitiano  $\varphi$ . Si dice allora che  $f$  è **unitario** se  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$ . Sia  $A \in M(n, \mathbb{C})$ . Si dice dunque che  $A$  è **unitaria** se  $A^*A = AA^* = I_n$ .

**Definizione.** Le matrici unitarie di  $M(n, \mathbb{C})$  formano un sottogruppo moltiplicativo di  $GL(n, \mathbb{C})$ , detto **gruppo unitario**, e indicato con  $U_n$ . Il sottogruppo di  $U_n$  contenente solo le matrici con determinante pari a 1 è detto **gruppo unitario speciale**, e si denota con  $SU_n$ .

**Osservazione.**

Si possono classificare in modo semplice alcuni di questi gruppi unitari.

$\blacktriangleright A \in U_n \implies 1 = \det(I_n) = \det(AA^*) = \det(A)\overline{\det(A)} = |\det(A)|^2 = 1.$   $\blacktriangleright A = (a) \in U_1 \iff A^*A = I_1 \iff |a|^2 = 1 \iff a = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi)$ , ossia il numero complesso  $a$  appartiene alla circonferenza di raggio unitario.  $\blacktriangleright A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in$

$SU_2 \iff AA^* = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a\bar{c} + b\bar{d} \\ \bar{a}c + \bar{b}d & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} = I_2, \det(A) = 1$ , ossia se il seguente sistema di equazioni è soddisfatto:

$$\begin{cases} |a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1, \\ a\bar{c} + b\bar{d} = 0, \\ ad - bc = 1, \end{cases}$$



2 Prodotti hermitiani, spazi euclidei e teorema spettrale (non indicizzato)

le cui soluzioni riassumono il gruppo  $SU_2$  nel seguente modo:

$$SU_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ \bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C}) \mid |x|^2 + |y|^2 = 1 \right\}.$$

**Definizione.** (spazio euclideo reale) Si definisce **spazio euclideo reale** uno spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{R}$  dotato del prodotto scalare standard  $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Definizione.** (spazio euclideo complesso) Si definisce **spazio euclideo complesso** uno spazio vettoriale  $V$  su  $\mathbb{C}$  dotato del prodotto hermitiano standard  $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Proposizione 2.11.** Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio euclideo reale e sia  $\mathcal{B}$  una base ortonormale di  $V$ . Allora  $f \in \text{End}(V)$  è simmetrico  $\iff M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} \iff M_{\mathcal{B}}(f)$  è simmetrica.

*Dimostrazione.* Per il corollario precedente,  $f$  è simmetrico  $\iff f = f^{\top} \iff M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top}$ .  $\square$

**Proposizione 2.12.** Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio euclideo reale e sia  $\mathcal{B}$  una base ortonormale di  $V$ . Allora  $f \in \text{End}(V)$  è ortogonale  $\iff M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top}M_{\mathcal{B}}(f) = I_n \stackrel{\text{def}}{\iff} M_{\mathcal{B}}(f)$  è ortogonale.

*Dimostrazione.* Si osserva che  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$ . Sia  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ . Se  $f$  è ortogonale, allora  $[v]_{\mathcal{B}}^{\top} [w]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) [w]_{\mathcal{B}} = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = (M_{\mathcal{B}}(f)[v]_{\mathcal{B}})^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) (M_{\mathcal{B}}(f)[w]_{\mathcal{B}}) = [v]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f) [w]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) [w]_{\mathcal{B}}$ . Allora, come visto nel corollario precedente, si ricava che  $M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) = I_n$ . Dal momento che gli inversi sinistri sono anche inversi destri,  $M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = I_n$ .

Se invece  $M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = I_n$ ,  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [v]_{\mathcal{B}}^{\top} [w]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} M_{\mathcal{B}}(f) [w]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(f)[v]_{\mathcal{B}})^{\top} (M_{\mathcal{B}}(f)[w]_{\mathcal{B}}) = (M_{\mathcal{B}}(f)[v]_{\mathcal{B}})^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) (M_{\mathcal{B}}(f)[w]_{\mathcal{B}}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w}))$ , e quindi  $f$  è ortogonale.  $\square$

**Proposizione 2.13.** Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio euclideo complesso e sia  $\mathcal{B}$  una base ortonormale di  $V$ . Allora  $f \in \text{End}(V)$  è hermitiano  $\iff M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f)^*$   $\stackrel{\text{def}}{\iff} M_{\mathcal{B}}(f)$  è hermitiana.

*Dimostrazione.* Per il corollario precedente,  $f$  è hermitiana  $\iff f = f^* \iff M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f^*) = M_{\mathcal{B}}(f)^*$ .  $\square$

**Proposizione 2.14.** Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio euclideo complesso e sia  $\mathcal{B}$  una base ortonormale di  $V$ . Allora  $f \in \text{End}(V)$  è unitario  $\iff M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(f)^* = M_{\mathcal{B}}(f)^*M_{\mathcal{B}}(f) = I_n \stackrel{\text{def}}{\iff} M_{\mathcal{B}}(f)$  è unitaria.

*Dimostrazione.* Si osserva che  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$ . Sia  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ . Se  $f$  è unitario, allora  $[v]_{\mathcal{B}}^* [w]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) [w]_{\mathcal{B}} = \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), f(\underline{w})) = (M_{\mathcal{B}}(f)[v]_{\mathcal{B}})^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) (M_{\mathcal{B}}(f)[w]_{\mathcal{B}}) = [v]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(\varphi) M_{\mathcal{B}}(f) [w]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) [w]_{\mathcal{B}}$ .

$[v]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) [w]_{\mathcal{B}}$ . Allora, come visto nel corollario precedente, si ricava che  $M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) = I_n$ . Dal momento che gli inversi sinistri sono anche inversi destri,  $M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^* = I_n$ .

Se  $M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}(f)^* = I_n$ ,  $\varphi(v, w) = [v]_{\mathcal{B}}^* [w]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}}^* M_{\mathcal{B}}(f)^* M_{\mathcal{B}}(f) [w]_{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}(f) [v]_{\mathcal{B}})^* (M_{\mathcal{B}}(f) [w]_{\mathcal{B}}) = (M_{\mathcal{B}}(f) [v]_{\mathcal{B}})^* M_{\mathcal{B}}(\varphi)(M_{\mathcal{B}}(f) [w]_{\mathcal{B}}) = \varphi(f(v), f(w))$ , e quindi  $f$  è unitario.  $\square$

**Osservazione.** Se  $\mathcal{B}$  è una base ortonormale di  $(V, \varphi)$ , ricordando che  $M_{\mathcal{B}}(f^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top}$  e che  $M_{\mathcal{B}}(f^*) = M_{\mathcal{B}}(f)^*$ , sono equivalenti allora i seguenti fatti:

- ▶  $f \circ f^{\top} = f^{\top} \circ f = \text{Id}_V \iff M_{\mathcal{B}}(f)$  è ortogonale  $\iff f$  è ortogonale,
- ▶  $f \circ f^* = f^* \circ f = \text{Id}_V \iff M_{\mathcal{B}}(f)$  è unitaria  $\iff f$  è unitario (se  $V$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$ ).

**Proposizione 2.15.** Sia  $V = \mathbb{R}^n$  uno spazio vettoriale col prodotto scalare standard  $\varphi$ . Allora sono equivalenti i seguenti fatti:

- (i)  $A \in O_n$ ,
- (ii)  $f_A$  è un operatore ortogonale,
- (iii) le colonne e le righe di  $A$  formano una base ortonormale di  $V$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{B}$  la base canonica di  $V$ . Allora  $M_{\mathcal{B}}(f_A) = A$ , e quindi, per una proposizione precedente,  $f_A$  è un operatore ortogonale. Viceversa si deduce che se  $f_A$  è un operatore ortogonale,  $A \in O_n$ . Dunque è sufficiente dimostrare che  $A \in O_n \iff$  le colonne e le righe di  $A$  formano una base ortonormale di  $V$ .

( $\implies$ ) Se  $A \in O_n$ , in particolare  $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ , e quindi  $A$  è invertibile. Allora le sue colonne e le sue righe formano già una base di  $V$ , essendo  $n$  vettori di  $V$  linearmente indipendenti. Inoltre, poiché  $A \in O_n$ ,  $\varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = \varphi(A\underline{e}_i, A\underline{e}_j)$ , e quindi le colonne di  $A$  si mantengono a due a due ortogonali tra di loro, mentre  $\varphi(A\underline{e}_i, A\underline{e}_i) = \varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_i) = 1$ . Pertanto le colonne di  $A$  formano una base ortonormale di  $V$ .

Si osserva che anche  $A^{\top} \in O_n$ . Allora le righe di  $A$ , che non sono altro che le colonne di  $A^{\top}$ , formano anch'esse una base ortonormale di  $V$ .

( $\impliedby$ ) Nel moltiplicare  $A^{\top}$  con  $A$  altro non si sta facendo che calcolare il prodotto scalare  $\varphi$  tra ogni riga di  $A^{\top}$  e ogni colonna di  $A$ , ossia  $(A^*A)_{ij} = \varphi((A^{\top})_i, A^j) = \varphi(A^i, A^j) = \delta_{ij}$ . Quindi  $A^{\top}A = AA^{\top} = I_n$ , da cui si deduce che  $A \in O_n$ .  $\square$

**Proposizione 2.16.** Sia  $V = \mathbb{C}^n$  uno spazio vettoriale col prodotto hermitiano standard  $\varphi$ . Allora sono equivalenti i seguenti fatti:

2 Prodotti hermitiani, spazi euclidei e teorema spettrale (non indicizzato)

- (i)  $A \in U_n$ ,
- (ii)  $f_A$  è un operatore unitario,
- (iii) le colonne e le righe di  $A$  formano una base ortonormale di  $V$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{B}$  la base canonica di  $V$ . Allora  $M_{\mathcal{B}}(f_A) = A$ , e quindi, per una proposizione precedente,  $f_A$  è un operatore unitario. Viceversa si deduce che se  $f_A$  è un operatore unitario,  $A \in U_n$ . Dunque è sufficiente dimostrare che  $A \in U_n \iff$  le colonne e le righe di  $A$  formano una base ortonormale di  $V$ .

( $\implies$ ) Se  $A \in U_n$ , in particolare  $A \in GL(n, \mathbb{R})$ , e quindi  $A$  è invertibile. Allora le sue colonne e le sue righe formano già una base di  $V$ , essendo  $n$  vettori di  $V$  linearmente indipendenti. Inoltre, poiché  $A \in U_n$ ,  $\varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_j) = \varphi(A\underline{e}_i, A\underline{e}_j)$ , e quindi le colonne di  $A$  si mantengono a due a due ortogonali tra di loro, mentre  $\varphi(A\underline{e}_i, A\underline{e}_i) = \varphi(\underline{e}_i, \underline{e}_i) = 1$ . Pertanto le colonne di  $A$  formano una base ortonormale di  $V$ .

Si osserva che anche  $A^T \in U_n$ . Allora le righe di  $A$ , che non sono altro che le colonne di  $A^T$ , formano anch'esse una base ortonormale di  $V$ .

( $\impliedby$ ) Nel moltiplicare  $A^*$  con  $A$  altro non si sta facendo che calcolare il prodotto hermitiano  $\varphi$  tra ogni riga coniugata di  $A^*$  e ogni colonna di  $A$ , ossia  $(A^*A)_{ij} = \varphi((A^T)_i, A^j) = \varphi(A^i, A^j) = \delta_{ij}$ . Quindi  $A^*A = AA^* = I_n$ , da cui si deduce che  $A \in U_n$ .  $\square$

**Proposizione 2.17.** Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio euclideo reale. Allora valgono i seguenti tre risultati:

- (i)  $(V_{\mathbb{C}}, \varphi_{\mathbb{C}})$  è uno spazio euclideo complesso.
- (ii) Se  $f \in \text{End}(V)$  è simmetrico, allora  $f_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V)$  è hermitiano.
- (iii) Se  $f \in \text{End}(V)$  è ortogonale, allora  $f_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V)$  è unitario.

*Dimostrazione.* Dacché  $\varphi$  è il prodotto scalare standard dello spazio euclideo reale  $V$ , esiste una base ortonormale di  $V$ . Sia allora  $\mathcal{B}$  una base ortonormale di  $V$ . Si dimostrano i tre risultati separatamente.

- È sufficiente dimostrare che  $\varphi_{\mathbb{C}}$  altro non è che il prodotto hermitiano standard. Come si è già osservato precedentemente,  $M_{\mathcal{B}}(\varphi_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ , e quindi, dacché  $M_{\mathcal{B}}(\varphi) = I_n$ , essendo  $\mathcal{B}$  ortonormale, vale anche che  $M_{\mathcal{B}}(\varphi_{\mathbb{C}}) = I_n$ , ossia  $\varphi_{\mathbb{C}}$  è proprio il prodotto hermitiano standard.
- Poiché  $f$  è simmetrico,  $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f)^T$ , e quindi anche  $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^T$ . Dal momento che  $M_{\mathcal{B}}(f) \in M(n, \mathbb{R})$ ,  $M_{\mathcal{B}}(f) = \overline{M_{\mathcal{B}}(f)} \implies M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^T = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^*$ . Quindi  $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^*$ , ossia  $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})$  è hermitiana, e pertanto anche  $f_{\mathbb{C}}$  è hermitiano.

2 Prodotti hermitiani, spazi euclidei e teorema spettrale (non indicizzato)

- Poiché  $f$  è ortogonale,  $M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = I_n$ , e quindi anche  $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^{\top} = I_n$ . Allora, come prima, si deduce che  $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^{\top} = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^*$ , essendo  $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f) \in M(n, \mathbb{R})$ , da cui si ricava che  $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^* = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^{\top} = I_n$ , ossia che  $f_{\mathbb{C}}$  è unitario. □

**Esercizio 1.** Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio euclideo reale. Allora valgono i seguenti risultati:

- Se  $f, g \in \text{End}(V)$  commutano, allora anche  $f_{\mathbb{C}}, g_{\mathbb{C}} \in \text{End}(V_{\mathbb{C}})$  commutano.
- Se  $f \in \text{End}(V)$ ,  $(f^{\top})_{\mathbb{C}} = (f_{\mathbb{C}})^*$ .
- Se  $f \in \text{End}(V)$ ,  $f$  diagonalizzabile  $\iff f^{\top}$  diagonalizzabile.

*Soluzione.* Dacché  $\varphi$  è il prodotto scalare standard dello spazio euclideo reale  $V$ , esiste una base ortonormale  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  di  $V$ . Si dimostrano allora separatamente i tre risultati.

- Si osserva che  $M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})M_{\mathcal{B}}(g_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f)M_{\mathcal{B}}(g) = M_{\mathcal{B}}(g)M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(g_{\mathbb{C}})M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})$ , e quindi che  $f_{\mathbb{C}} \circ g_{\mathbb{C}} = g_{\mathbb{C}} \circ f_{\mathbb{C}}$ .
- Si osserva che  $M_{\mathcal{B}}(f) \in M(n, \mathbb{R}) \implies M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = M_{\mathcal{B}}(f)^*$ , e quindi che  $M_{\mathcal{B}}((f^{\top})_{\mathbb{C}}) = M_{\mathcal{B}}(f^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = M_{\mathcal{B}}(f)^* = M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}})^* = M_{\mathcal{B}}((f_{\mathbb{C}})^*)$ . Allora  $(f^{\top})_{\mathbb{C}} = (f_{\mathbb{C}})^*$ .
- Poiché  $\mathcal{B}$  è ortonormale,  $M_{\mathcal{B}}(f^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top}$ . Allora, se  $f$  è diagonalizzabile, anche  $M_{\mathcal{B}}(f)$  lo è, e quindi  $\exists P \in \text{GL}(n, \mathbb{K}), D \in M(n, \mathbb{K})$  diagonale tale che  $M_{\mathcal{B}}(f) = PDP^{-1}$ . Allora  $M_{\mathcal{B}}(f^{\top}) = M_{\mathcal{B}}(f)^{\top} = (P^{\top})^{-1}D^{\top}P^{\top}$  è simile ad una matrice diagonale, e pertanto  $M_{\mathcal{B}}(f^{\top})$  è diagonalizzabile. Allora anche  $f^{\top}$  è diagonalizzabile. Vale anche il viceversa considerando l'identità  $f = (f^{\top})^{\top}$  e l'implicazione appena dimostrata.

**Nota.** D'ora in poi, qualora non specificato diversamente, si assumerà che  $V$  sia uno spazio euclideo, reale o complesso.

**Definizione.** (norma euclidea) Sia  $(V, \varphi)$  un qualunque spazio euclideo. Si definisce **norma** la mappa  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$  tale che  $\|\underline{v}\| = \sqrt{\varphi(\underline{v}, \underline{v})}$ .

**Definizione.** (distanza euclidea tra due vettori) Sia  $(V, \varphi)$  un qualunque spazio euclideo. Si definisce **distanza** la mappa  $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$  tale che  $d(\underline{v}, \underline{w}) = \|\underline{v} - \underline{w}\|$ .

**Osservazione.**

- Si osserva che in effetti  $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}^+ \forall \underline{v} \in V$ . Infatti, sia per il caso reale che per il caso complesso,  $\varphi$  è definito positivo.
- Vale che  $\|\underline{v}\| = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$ . Infatti, se  $\underline{v} = \underline{0}$ , chiaramente  $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0 \implies \|\underline{v}\| = 0$ ; se invece  $\|\underline{v}\| = 0$ ,  $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$ , e quindi  $\underline{v} = \underline{0}$ , dacché  $V^{\perp} = \{\underline{0}\}$ , essendo  $\varphi$  definito

positivo.

► Inoltre, vale chiaramente che  $\|\alpha \underline{v}\| = |\alpha| \|\underline{v}\|$ .

► Se  $f$  è un operatore ortogonale (o unitario), allora  $f$  mantiene sia le norme che le distanze tra vettori. Infatti  $\|\underline{v} - \underline{w}\|^2 = \varphi(\underline{v} - \underline{w}, \underline{v} - \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v} - \underline{w}), f(\underline{v} - \underline{w})) = \varphi(f(\underline{v}) - f(\underline{w}), f(\underline{v}) - f(\underline{w})) = \|f(\underline{v}) - f(\underline{w})\|^2$ , da cui segue che  $\|\underline{v} - \underline{w}\| = \|f(\underline{v}) - f(\underline{w})\|$ .

**Proposizione 2.18** (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Vale che  $\|\underline{v}\| \|\underline{w}\| \geq |\varphi(\underline{v}, \underline{w})|$ ,  $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$ , dove l'uguaglianza è raggiunta soltanto se  $\underline{v}$  e  $\underline{w}$  sono linearmente dipendenti.

*Dimostrazione.* Si consideri innanzitutto il caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , e quindi il caso in cui  $\varphi$  è il prodotto scalare standard. Siano  $\underline{v}, \underline{w} \in V$ . Si consideri la disuguaglianza  $\|\underline{v} + t\underline{w}\|^2 \geq 0$ , valida per ogni elemento di  $V$ . Allora  $\|\underline{v} + t\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2\varphi(\underline{v}, \underline{w})t + \|\underline{w}\|^2 t^2 \geq 0$ . L'ultima disuguaglianza è possibile se e solo se  $\frac{\Delta}{4} \leq 0$ , e quindi se e solo se  $\varphi(\underline{v}, \underline{w})^2 - \|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^2 \leq 0 \iff \|\underline{v}\| \|\underline{w}\| \geq \varphi(\underline{v}, \underline{w})$ . Vale in particolare l'equivalenza se e solo se  $\|\underline{v} + t\underline{w}\| = 0$ , ossia se  $\underline{v} + t\underline{w} = \underline{0}$ , da cui la tesi.

Si consideri ora il caso  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , e dunque il caso in cui  $\varphi$  è il prodotto hermitiano standard. Siano  $\underline{v}, \underline{w} \in V$ , e siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Si consideri allora la disuguaglianza  $\|\alpha \underline{v} + \beta \underline{w}\|^2 \geq 0$ , valida per ogni elemento di  $V$ . Allora  $\|\alpha \underline{v} + \beta \underline{w}\|^2 = \|\alpha \underline{v}\|^2 + \varphi(\alpha \underline{v}, \beta \underline{w}) + \varphi(\beta \underline{w}, \alpha \underline{v}) + \|\beta \underline{w}\|^2 = |\alpha|^2 \|\underline{v}\|^2 + \overline{\alpha} \beta \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \alpha \overline{\beta} \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + |\beta|^2 \|\underline{w}\|^2 \geq 0$ . Ponendo allora  $\alpha = \|\underline{w}\|^2$  e  $\beta = -\varphi(\underline{w}, \underline{v}) = -\overline{\varphi(\underline{v}, \underline{w})}$ , si deduce che:

$$\|\underline{v}\|^2 \|\underline{w}\|^4 - \|\underline{w}\|^2 |\varphi(\underline{v}, \underline{w})| \geq 0.$$

Se  $\underline{w} = \underline{0}$ , la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz è già dimostrata. Altrimenti, è sufficiente dividere per  $\|\underline{w}\|^2$  (dal momento che  $\underline{w} \neq \underline{0} \iff \|\underline{w}\| \neq 0$ ) per ottenere la tesi. Come prima, si osserva che l'uguaglianza si ottiene se e solo se  $\underline{v}$  e  $\underline{w}$  sono linearmente dipendenti.  $\square$

**Proposizione 2.19** (disuguaglianza triangolare).  $\|\underline{v} + \underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|$ .

*Dimostrazione.* Si osserva che  $\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \varphi(\underline{w}, \underline{v}) + \|\underline{w}\|^2$ . Se  $\varphi$  è il prodotto scalare standard, si ricava che:

$$\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2\varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \|\underline{w}\|^2 \leq \|\underline{v}\|^2 + 2\|\underline{v}\| \|\underline{w}\| + \|\underline{w}\|^2 = (\|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|)^2,$$

dove si è utilizzata la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Da quest'ultima disuguaglianza si ricava, prendendo la radice quadrata, la disuguaglianza desiderata.

Se invece  $\varphi$  è il prodotto hermitiano standard,  $\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + 2\Re(\varphi(\underline{v}, \underline{w})) + \|\underline{w}\|^2 \leq \|\underline{v}\|^2 + 2|\varphi(\underline{v}, \underline{w})| + \|\underline{w}\|^2$ . Allora, riapplicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ottiene che:

$$\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 \leq (\|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|)^2,$$

da cui, come prima, si ottiene la disuguaglianza desiderata.  $\square$

**Osservazione.** Utilizzando il concetto di norma euclidea, si possono ricavare due teoremi fondamentali della geometria, e già noti dalla geometria euclidea.

- ▶ Se  $\underline{v} \perp \underline{w}$ , allora  $\|\underline{v} + \underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \overbrace{(\varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \varphi(\underline{w}, \underline{v}))}^{=0} + \|\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 + \|\underline{w}\|^2$  (teorema di Pitagora),
- ▶ Se  $\|\underline{v}\| = \|\underline{w}\|$  e  $\varphi$  è un prodotto scalare, allora  $\varphi(\underline{v} + \underline{w}, \underline{v} - \underline{w}) = \|\underline{v}\|^2 - \varphi(\underline{v}, \underline{w}) + \varphi(\underline{w}, \underline{v}) - \|\underline{w}\|^2 = \|\underline{v}\|^2 - \|\underline{w}\|^2 = 0$ , e quindi  $\underline{v} + \underline{w} \perp \underline{v} - \underline{w}$  (le diagonali di un rombo sono ortogonali tra loro).

**Osservazione.** Sia  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  è una base ortogonale di  $V$  per  $\varphi$ .

- ▶ Se  $\underline{v} = a_1 \underline{v}_1 + \dots + a_n \underline{v}_n$ , con  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ , si osserva che  $\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i) = a_i \varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)$ . Quindi  $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)} \underline{v}_i$ . In particolare,  $\frac{\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)}$  è detto **coefficiente di Fourier** di  $\underline{v}$  rispetto a  $\underline{v}_i$ , e si indica con  $C(\underline{v}, \underline{v}_i)$ . Se  $\mathcal{B}$  è ortonormale,  $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \varphi(\underline{v}, \underline{v}_i) \underline{v}_i$ .
- ▶ Quindi  $\|\underline{v}\|^2 = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)^2}{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)}$ . In particolare, se  $\mathcal{B}$  è ortonormale,  $\|\underline{v}\|^2 = \sum_{i=1}^n \varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)^2$ . In tal caso, si può esprimere la disuguaglianza di Bessel:  $\|\underline{v}\|^2 \geq \sum_{i=1}^k \varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)^2$  per  $k \leq n$ .

**Osservazione.** (algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt) Se  $\varphi$  è non degenera (o in generale, se  $\text{CI}(\varphi) = \{0\}$ ) ed è data una base  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  per  $V$  (dove si ricorda che deve valere  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ ), è possibile applicare l'**algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt** per ottenere da  $\mathcal{B}$  una nuova base  $\mathcal{B}' = \{\underline{v}'_1, \dots, \underline{v}'_n\}$  con le seguenti proprietà:

- (i)  $\mathcal{B}'$  è una base ortogonale,
- (ii)  $\mathcal{B}'$  mantiene la stessa bandiera di  $\mathcal{B}$  (ossia  $\text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i) = \text{Span}(\underline{v}'_1, \dots, \underline{v}'_i)$  per ogni  $1 \leq i \leq n$ ).

L'algoritmo si applica nel seguente modo: si prenda in considerazione  $\underline{v}_1$  e sottragga ad ogni altro vettore della base il vettore  $C(\underline{v}_1, \underline{v}_i) \underline{v}_1 = \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1$ , rendendo ortogonale ogni altro vettore della base con  $\underline{v}_1$ . Pertanto si applica la mappa  $\underline{v}_i \mapsto \underline{v}_i - \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1 = \underline{v}_i^{(1)}$ . Si verifica infatti che  $\underline{v}_1$  e  $\underline{v}_i^{(1)}$  sono ortogonali per  $2 \leq i \leq n$ :

$$\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i^{(1)}) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i) - \varphi\left(\underline{v}_1, \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1\right) = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i) - \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_i) = 0.$$

Poiché  $\underline{v}_1$  non è isotropo, si deduce la decomposizione  $V = \text{Span}(\underline{v}_1) \oplus \text{Span}(\underline{v}_1)^\perp$ . In particolare  $\dim \text{Span}(\underline{v}_1)^\perp = n - 1$ : essendo allora i vettori  $\underline{v}_2^{(1)}, \dots, \underline{v}_n^{(1)}$  linearmente indipendenti e appartenenti a  $\text{Span}(\underline{v}_1)^\perp$ , ne sono una base. Si conclude quindi che vale la seguente decomposizione:

$$V = \text{Span}(\underline{v}_1) \oplus^\perp \text{Span}(\underline{v}_2^{(1)}, \dots, \underline{v}_n^{(1)}).$$

## 2 Prodotti hermitiani, spazi euclidei e teorema spettrale (non indicizzato)

Si riapplica dunque l'algoritmo di Gram-Schmidt prendendo come spazio vettoriale lo spazio generato dai vettori a cui si è applicato precedentemente l'algoritmo, ossia  $V' = \text{Span}(\underline{v}_2^{(1)}, \dots, \underline{v}_n^{(1)})$ , fino a che non si ottiene  $V' = \{0\}$ .

Si può addirittura ottenere una base ortonormale a partire da  $\mathcal{B}'$  normalizzando ogni vettore (ossia dividendo per la propria norma), se si sta considerando uno spazio euclideo.

**Osservazione.** Poiché la base ottenuta tramite Gram-Schmidt mantiene la stessa bandiera della base di partenza, ogni matrice triangolabile è anche triangolabile mediante una base ortogonale.

**Esempio.** Si consideri  $V = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , ossia  $\mathbb{R}^3$  dotato del prodotto scalare standard. Si applica l'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt sulla seguente base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_1 = \underline{e}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{v}_3} \right\}.$$

Alla prima iterazione dell'algoritmo si ottengono i seguenti vettori:

$$\begin{aligned} \bullet \underline{v}_2^{(1)} &= \underline{v}_2 - \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1 = \underline{v}_2 - \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e}_2, \\ \bullet \underline{v}_3^{(1)} &= \underline{v}_3 - \frac{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_3)}{\varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_1)} \underline{v}_1 = \underline{v}_3 - \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si considera ora  $V' = \text{Span}(\underline{v}_2^{(1)}, \underline{v}_3^{(1)})$ . Alla seconda iterazione dell'algoritmo si ottiene allora il seguente vettore:

$$\bullet \underline{v}_3^{(2)} = \underline{v}_3^{(1)} - \frac{\varphi(\underline{v}_2^{(1)}, \underline{v}_3^{(1)})}{\varphi(\underline{v}_2^{(1)}, \underline{v}_2^{(1)})} \underline{v}_2^{(1)} = \underline{v}_3^{(1)} - \underline{v}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e}_3.$$

Quindi la base ottenuta è  $\mathcal{B}' = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ , ossia la base canonica di  $\mathbb{R}^3$ , già ortonormale.

**Osservazione.** Si osserva adesso che se  $(V, \varphi)$  è uno spazio euclideo (e quindi  $\varphi > 0$ ), e  $W$  è un sottospazio di  $V$ , vale la seguente decomposizione:

$$V = W \oplus^\perp W^\perp.$$

Pertanto ogni vettore  $\underline{v} \in V$  può scriversi come  $\underline{w} + \underline{w}'$  dove  $\underline{w} \in W$  e  $\underline{w}' \in W^\perp$ , dove  $\varphi(\underline{w}, \underline{w}') = 0$ .

**Definizione.** (proiezione ortogonale) Si definisce l'applicazione  $\text{pr}_W : V \rightarrow V$ , detta **proiezione ortogonale** su  $W$ , in modo tale che  $\text{pr}_W(\underline{v}) = \underline{w}$ , dove  $\underline{v} = \underline{w} + \underline{w}'$ , con  $\underline{w} \in W$  e  $\underline{w}' \in W^\perp$ .

**Osservazione.**

► Dacché la proiezione ortogonale è un caso particolare della classica applicazione lineare di proiezione su un sottospazio di una somma diretta,  $\text{pr}_W$  è un'applicazione lineare.

► Vale chiaramente che  $\text{pr}_W^2 = \text{pr}_W$ , da cui si ricava, se  $W^\perp \neq \{0\}$ , che  $\varphi_{\text{pr}_W}(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$ , ossia che  $\text{sp}(\text{pr}_W) = \{0, 1\}$ . Infatti  $\text{pr}_W(\underline{v})$  appartiene già a  $W$ , ed essendo la scrittura in somma di due elementi, uno di  $W$  e uno di  $W'$ , unica,  $\text{pr}_W(\text{pr}_W(\underline{v})) = \text{pr}_W(\underline{v})$ , da cui l'identità  $\text{pr}_W^2 = \text{pr}_W$ .

► Seguendo il ragionamento di prima, vale anche che  $\text{pr}_W|_W = \text{Id}_W$  e che  $\text{pr}_W|_{W^\perp} = 0$ .

► Inoltre, vale la seguente riscrittura di  $\underline{v} \in V$ :  $\underline{v} = \text{pr}_W(\underline{v}) + \text{pr}_{W^\perp}(\underline{v})$ .

► Se  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  è una base ortogonale di  $W$ , allora  $\text{pr}_W(\underline{v}) = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(\underline{v}, \underline{v}_i)}{\varphi(\underline{v}_i, \underline{v}_i)} \underline{v}_i = \sum_{i=1}^n C(\underline{v}, \underline{v}_i) \underline{v}_i$ . Infatti  $\underline{v} - \sum_{i=1}^n C(\underline{v}, \underline{v}_i) \underline{v}_i \in W^\perp$ .

►  $\text{pr}_W$  è un operatore simmetrico (o hermitiano se lo spazio è complesso). Infatti  $\varphi(\text{pr}_W(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\text{pr}_W(\underline{v}), \text{pr}_W(\underline{w}) + \text{pr}_{W^\perp}(\underline{w})) = \varphi(\text{pr}_W(\underline{v}), \text{pr}_W(\underline{w})) = \varphi(\text{pr}_W(\underline{v}) + \text{pr}_{W^\perp}(\underline{v}), \text{pr}_W(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \text{pr}_W(\underline{w}))$ .

**Proposizione 2.20.** Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio euclideo. Allora valgono i seguenti risultati:

- (i) Siano  $U, W \subseteq V$  sono sottospazi di  $V$ , allora  $U \perp W$ , ossia<sup>5</sup>  $U \subseteq W^\perp$ ,  $\iff \text{pr}_U \circ \text{pr}_W = \text{pr}_W \circ \text{pr}_U = 0$ .
- (ii) Sia  $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$ . Allora  $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \text{pr}_{W_i}(\underline{v}) \iff W_i \perp W_j \forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$ .

*Dimostrazione.* Si dimostrano i due risultati separatamente.

- (i) Sia  $\underline{v} \in V$ . Allora  $\text{pr}_W(\underline{v}) \in W = W^{\perp\perp} \subseteq U^\perp$ . Pertanto  $\text{pr}_U(\text{pr}_W(\underline{v})) = 0$ . Analogamente  $\text{pr}_W(\text{pr}_U(\underline{v})) = 0$ , da cui la tesi.
- (ii) Sia vero che  $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \text{pr}_{W_i}(\underline{v}) \forall \underline{v} \in V$ . Sia  $\underline{w} \in W_j$ . Allora  $\underline{w} = \sum_{i=1}^n \text{pr}_{W_i}(\underline{w}) = \underline{w} + \sum_{i \neq j} \text{pr}_{W_i}(\underline{w}) \implies \text{pr}_{W_i}(\underline{w}) = 0 \forall i \neq j$ . Quindi  $\underline{w} \in W_i^\perp \forall i \neq j$ , e si conclude che  $W_i \subseteq W_j^\perp \implies W_i \perp W_j$ . Se invece  $W_i \perp W_j \forall i \neq j$ , sia  $\mathcal{B}_i = \{\underline{w}_i^{(1)}, \dots, \underline{w}_i^{(k_i)}\}$  una base ortogonale di  $W_i$ . Allora  $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^n \mathcal{B}_i$  è anch'essa una base ortogonale di  $V$ , essendo  $\varphi(\underline{w}_i^{(t_i)}, \underline{w}_j^{(t_j)}) = 0$  per ipotesi. Pertanto  $\underline{v} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} C(\underline{v}, \underline{w}_i^{(j)}) \underline{w}_i^{(j)} = \sum_{i=1}^n \text{pr}_{W_i}(\underline{v})$ , da cui la tesi.  $\square$

<sup>5</sup>È sufficiente che valga  $U \subseteq W^\perp$  affinché valga anche  $W \subseteq U^\perp$ . Infatti  $U \subseteq W^\perp \implies W = W^{\perp\perp} \subseteq U^\perp$ . Si osserva che in generale vale che  $W \subseteq W^{\perp\perp}$ , dove vale l'uguaglianza nel caso di un prodotto  $\varphi$  non degenere, com'è nel caso di uno spazio euclideo, essendo  $\varphi > 0$  per ipotesi.



**Definizione.** (inversione ortogonale) Si definisce l'applicazione  $\rho_W : V \rightarrow V$ , detta **inversione ortogonale**, in modo tale che, detto  $\underline{v} = \underline{w} + \underline{w}' \in V$  con  $\underline{w} \in W$ ,  $\underline{w}' \in W^\perp$ ,  $\rho_W(\underline{v}) = \underline{w} - \underline{w}'$ . Se  $\dim W = \dim V - 1$ , si dice che  $\rho_W$  è una **riflessione**.

**Osservazione.**

- ▶ Si osserva che  $\rho_W$  è un'applicazione lineare.
- ▶ Vale l'identità  $\rho_W^2 = \text{Id}_V$ , da cui si ricava che  $\varphi_{\rho_W}(\lambda) \mid (\lambda - 1)(\lambda + 1)$ . In particolare, se  $W^\perp \neq \{0\}$ , vale proprio che  $\text{sp}(\rho_W) = \{\pm 1\}$ , dove  $V_1 = W$  e  $V_{-1} = W^\perp$ .
- ▶  $\rho_W$  è ortogonale (o unitaria, se  $V$  è uno spazio euclideo complesso). Infatti se  $\underline{v}_1 = \underline{w}_1 + \underline{w}_1'$  e  $\underline{v}_2 = \underline{w}_2 + \underline{w}_2'$ , con  $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$  e  $\underline{w}_1', \underline{w}_2' \in W^\perp$ ,  $\varphi(\rho_W(\underline{v}_1), \rho_W(\underline{v}_2)) = \varphi(\underline{w}_1 - \underline{w}_1', \underline{w}_2 - \underline{w}_2') = \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2) - \underbrace{\varphi(\underline{w}_1', \underline{w}_2) + \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2')}_{=0} + \varphi(\underline{w}_1', \underline{w}_2') = \varphi(\underline{w}_1 - \underline{w}_1', \underline{w}_2 - \underline{w}_2')$ .

Quindi  $\varphi(\rho_W(\underline{v}_1), \rho_W(\underline{v}_2)) = \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2) + \varphi(\underline{w}_1', \underline{w}_2) + \varphi(\underline{w}_1, \underline{w}_2') + \varphi(\underline{w}_1', \underline{w}_2') = \varphi(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ .

**Lemma 2.1.** Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio euclideo reale. Siano  $\underline{u}, \underline{w} \in V$ . Se  $\|\underline{u}\| = \|\underline{w}\|$ , allora esiste un sottospazio  $W$  di dimensione  $n - 1$  per cui la riflessione  $\rho_W$  relativa a  $\varphi$  è tale che  $\rho_W(\underline{u}) = \underline{w}$ .

*Dimostrazione.* Se  $\underline{v}$  e  $\underline{w}$  sono linearmente dipendenti, dal momento che  $\|\underline{v}\| = \|\underline{w}\|$ , deve valere anche che  $\underline{v} = \underline{w}$ . Sia  $\underline{u} \neq 0$ ,  $\underline{u} \in \text{Span}(\underline{v})^\perp$ . Si consideri  $U = \text{Span}(\underline{u})$ : si osserva che  $\dim U = 1$  e che, essendo  $\varphi$  non degenere,  $\dim U^\perp = n - 1$ . Posto allora  $W = U^\perp$ , si ricava, sempre perché  $\varphi$  è non degenere, che  $U = U^{\perp\perp} = W^\perp$ . Si conclude pertanto che  $\rho_W(\underline{v}) = \underline{v} = \underline{w}$ .

Siano adesso  $\underline{v}$  e  $\underline{w}$  linearmente indipendenti e sia  $U = \text{Span}(\underline{v} - \underline{w})$ . Dal momento che  $\dim U = 1$  e  $\varphi$  è non degenere,  $\dim U^\perp = n - 1$ . Sia allora  $W = U^\perp$ . Allora, come prima,  $U = U^{\perp\perp} = W^\perp$ . Si consideri dunque la riflessione  $\rho_W$ : dacché  $\underline{v} = \frac{\underline{v} + \underline{w}}{2} + \frac{\underline{v} - \underline{w}}{2}$ , e  $\varphi(\frac{\underline{v} + \underline{w}}{2}, \frac{\underline{v} - \underline{w}}{2}) = \frac{\|\underline{v}\| - \|\underline{w}\|}{4} = 0$ ,  $\underline{v}$  è già decomposto in un elemento di  $W$  e in uno di  $W^\perp$ , per cui si conclude che  $\rho_W(\underline{v}) = \frac{\underline{v} + \underline{w}}{2} - \frac{\underline{v} - \underline{w}}{2} = \underline{w}$ , ottenendo la tesi. □

**Teorema 2.3** (di Cartan–Dieudonné). Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio euclideo reale. Ogni isometria di  $V$  è allora prodotto di al più  $n$  riflessioni.

*Dimostrazione.* Si dimostra la tesi applicando il principio di induzione sulla dimensione  $n$  di  $V$ .

(*passo base*) Sia  $n = 1$  e sia inoltre  $f$  un'isometria di  $V$ . Sia  $\underline{v}_1$  l'unico elemento di una base ortonormale  $\mathcal{B}$  di  $V$ . Allora  $\|f(\underline{v}_1)\| = \|\underline{v}_1\| = 1$ , da cui si ricava che<sup>6</sup>  $f(\underline{v}_1) = \pm \underline{v}_1$ , ossia che  $f = \pm \text{Id}_V$ . Se  $f = \text{Id}_V$ ,  $f$  è un prodotto vuoto, e già verifica la tesi; altrimenti  $f = \rho_{\{0\}}$ , dove si considera  $V = V \oplus^\perp \{0\}$ . Pertanto  $f$  è prodotto di al più una riflessione.

<sup>6</sup>Infatti, detto  $\lambda \in \mathbb{R}$  tale che  $f(\underline{v}_1) = \lambda \underline{v}_1$ ,  $\|\underline{v}_1\| = \|f(\underline{v}_1)\| = \lambda^2 \|\underline{v}_1\| \implies \lambda = \pm 1$ , ossia  $f = \pm \text{Id}$ , come volevasi dimostrare.

2 Prodotti hermitiani, spazi euclidei e teorema spettrale (non indicizzato)

(passo induttivo) Sia  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $V$ . Sia  $f$  un'isometria di  $V$ . Si assuma inizialmente l'esistenza di  $v_i$  tale per cui  $f(v_i) = v_i$ . Allora, detto  $W = \text{Span}(v_i)$ , si può decomporre  $V$  come  $W \oplus W^\perp$ . Si osserva che  $W^\perp$  è  $f$ -invariante: infatti, se  $u \in W^\perp$ ,  $\varphi(v_i, f(u)) = \varphi(f(v_i), f(u)) = \varphi(v_i, u) = 0 \implies f(u) \in W^\perp$ . Pertanto si può considerare l'isometria  $f|_{W^\perp}$ . Dacché  $\dim W^\perp = n - 1$ , per il passo induttivo esistono  $W_1, \dots, W_k$  sottospazi di  $W^\perp$  con  $k \leq n - 1$  per cui  $\rho_{W_1}, \dots, \rho_{W_k} \in \text{End}(W^\perp)$  sono tali che  $f|_{W^\perp} = \rho_{W_1} \circ \dots \circ \rho_{W_k}$ .

Si considerino allora le riflessioni  $\rho_{W_1 \oplus W}, \dots, \rho_{W_k \oplus W}$ . Si mostra che  $\rho_{W_1 \oplus W} \circ \dots \circ \rho_{W_k \oplus W}|_W = \text{Id}_W = f|_W$ . Affinché si faccia ciò è sufficiente mostrare che  $(\rho_{W_1 \oplus W} \circ \dots \circ \rho_{W_k \oplus W})(v_i) = v_i$ . Si osserva che  $v_i \in W_i \oplus W \forall 1 \leq i \leq k$ , e quindi che  $\rho_{W_k \oplus W}(v_i) = v_i$ . Reiterando l'applicazione di questa identità nel prodotto, si ottiene infine il risultato desiderato. Infine, si dimostra che  $\rho_{W_1 \oplus W} \circ \dots \circ \rho_{W_k \oplus W}|_{W^\perp} = \rho_{W_1} \circ \dots \circ \rho_{W_k} = f|_{W^\perp}$ . Analogamente a prima, è sufficiente mostrare che  $\rho_{W_k \oplus W}(u) = \rho_{W_k}(u) \forall u \in W^\perp$ . Sia  $u = \rho_{W_k}(u) + u'$  con  $u' \in W_k^\perp \cap W^\perp \subseteq (W_k \oplus W)^\perp$ , ricordando che  $W^\perp = W_k \oplus (W^\perp \cap W_k^\perp)$ . Allora, poiché  $\rho_{W_k}(u) \in W_k \subseteq (W_k \oplus W)$ , si conclude che  $\rho_{W_k \oplus W}(u) = \rho_{W_k}(u)$ . Pertanto, dacché vale che  $V = W \oplus W^\perp$  e che  $\rho_{W_1 \oplus W} \circ \dots \circ \rho_{W_k \oplus W}$  e  $f$ , ristretti su  $W$  o su  $W^\perp$ , sono le stesse identiche mappe, allora in particolare vale l'uguaglianza più generale:

$$f = \rho_{W_1 \oplus W} \circ \dots \circ \rho_{W_k \oplus W},$$

e quindi  $f$  è prodotto di  $k \leq n - 1$  riflessioni.

Se invece non esiste alcun  $v_i$  tale per cui  $f(v_i) = v_i$ , per il *Lemma 1* esiste una riflessione  $\tau$  tale per cui  $\tau(f(v_i)) = v_i$ . In particolare  $\tau \circ f$  è anch'essa un'isometria, essendo composizione di due isometrie. Allora, da prima, esistono  $U_1, \dots, U_k$  sottospazi di  $V$  con  $k \leq n - 1$  tali per cui  $\tau \circ f = \rho_{U_1} \circ \dots \circ \rho_{U_k}$ , da cui  $f = \tau \circ \rho_{U_1} \circ \dots \circ \rho_{U_k}$ , ossia  $f$  è prodotto di al più  $n$  riflessioni, concludendo il passo induttivo.  $\square$

**Lemma 2.1.** Sia  $f \in \text{End}(V)$  simmetrico (o hermitiano). Allora  $f$  ha solo autovalori reali<sup>7</sup>.

*Dimostrazione.* Si assuma che  $V$  è uno spazio euclideo complesso, e quindi che  $\varphi$  è un prodotto hermitiano. Allora, se  $f$  è hermitiano, sia  $\lambda \in \mathbb{C}$  un suo autovalore<sup>8</sup> e sia  $v \in V_\lambda$ . Allora  $\varphi(v, f(v)) = \varphi(f(v), v) = \overline{\varphi(v, f(v))} \implies \varphi(v, f(v)) \in \mathbb{R}$ . Inoltre vale la seguente identità:

$$\varphi(v, f(v)) = \varphi(v, \lambda v) = \lambda \varphi(v, v),$$

<sup>7</sup>Nel caso di  $f$  simmetrico, si intende in particolare che tutte le radici del suo polinomio caratteristico sono reali.

<sup>8</sup>Tale autovalore esiste sicuramente dal momento che  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  è un campo algebricamente chiuso.

2 Prodotti hermitiani, spazi euclidei e teorema spettrale (non indicizzato)

da cui, ricordando che  $\varphi$  è non degenere e che  $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \in \mathbb{R}$ , si ricava che:

$$\lambda = \frac{\varphi(\underline{v}, f(\underline{v}))}{\varphi(\underline{v}, \underline{v})} \in \mathbb{R}.$$

Sia ora invece  $V$  è uno spazio euclideo reale e  $\varphi$  è un prodotto scalare. Allora,  $(V_{\mathbb{C}}, \varphi_{\mathbb{C}})$  è uno spazio euclideo complesso, e  $f_{\mathbb{C}}$  è hermitiano. Sia  $\mathcal{B}$  una base di  $V$ . Allora, come visto all'inizio di questa dimostrazione,  $f_{\mathbb{C}}$  ha solo autovalori reali, da cui si ricava che il polinomio caratteristico di  $f_{\mathbb{C}}$  è completamente riducibile in  $\mathbb{R}$ . Si osserva inoltre che  $p_f(\lambda) = \det(M_{\mathcal{B}}(f) - \lambda I_n) = \det(M_{\mathcal{B}}(f_{\mathbb{C}}) - \lambda I_n) = p_{f_{\mathbb{C}}}(\lambda)$ . Si conclude dunque che anche  $p_f$  è completamente riducibile in  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Osservazione.** Dal lemma precedente consegue immediatamente che se  $A \in M(n, \mathbb{R})$  è simmetrica (o se appartiene a  $M(n, \mathbb{C})$  ed è hermitiana), considerando l'operatore simmetrico  $f_A$  indotto da  $A$  in  $\mathbb{R}^n$  (o  $\mathbb{C}^n$ ),  $f_A$  ha tutti autovalori reali, e dunque così anche  $A$ .

**Lemma 2.2.** Sia  $f \in \text{End}(V)$  simmetrico (o hermitiano). Allora se  $\lambda, \mu$  sono due autovalori distinti di  $f$ ,  $V_{\lambda} \perp V_{\mu}$ .

*Dimostrazione.* Siano  $\underline{v} \in V_{\lambda}$  e  $\underline{w} \in V_{\mu}$ . Allora<sup>9</sup>  $\lambda\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\lambda\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(f(\underline{v}), \underline{w}) = \varphi(\underline{v}, f(\underline{w})) = \varphi(\underline{v}, \mu\underline{w}) = \mu\varphi(\underline{v}, \underline{w})$ . Pertanto vale la seguente identità:

$$(\lambda - \mu)\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0.$$

In particolare, valendo  $\lambda - \mu \neq 0$  per ipotesi,  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \implies V_{\lambda} \perp V_{\mu}$ , da cui la tesi.  $\square$

**Lemma 2.3.** Sia  $f \in \text{End}(V)$  simmetrico (o hermitiano). Se  $W \subseteq V$  è  $f$ -invariante, allora anche  $W^{\perp}$  lo è.

*Dimostrazione.* Siano  $\underline{w} \in W$  e  $\underline{v} \in W^{\perp}$ . Allora  $\varphi(\underline{w}, f(\underline{v})) = \varphi(\underbrace{f(\underline{w})}_{\in W}, \underline{v}) = 0$ , da cui si

ricava che  $f(\underline{v}) \in W^{\perp}$ , ossia la tesi.  $\square$

**Teorema 2.4** (spettrale reale). Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio euclideo reale (o complesso) e sia  $f \in \text{End}(V)$  simmetrico (o hermitiano). Allora esiste una base ortogonale  $\mathcal{B}$  di  $V$  composta di autovettori per  $f$ .

*Dimostrazione.* Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  tutti gli autovalori reali di  $f$ . Sia inoltre  $W = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$ . Per i lemmi precedenti, vale che:

$$W = V_{\lambda_1} \oplus^{\perp} \dots \oplus^{\perp} V_{\lambda_k}.$$

Sicuramente  $W \subset V$ . Si assuma però che  $W \subsetneq V$ . Allora  $V = W \oplus^{\perp} W^{\perp}$ . In particolare, per il lemma precedente,  $W^{\perp}$  è  $f$ -invariante. Quindi  $f|_{W^{\perp}}$  è un endomorfismo di

<sup>9</sup>Si osserva che non è stato coniugato  $\lambda$  nei passaggi algebrici, valendo  $\lambda \in \mathbb{R}$  dallo scorso lemma.

## 2 Prodotti hermitiani, spazi euclidei e teorema spettrale (non indicizzato)

uno spazio di dimensione non nulla. Si osserva che  $f|_{W^\perp}$  è chiaramente simmetrico (o hermitiano), essendo solo una restrizione di  $f$ . Allora  $f|_{W^\perp}$  ammette autovalori reali per i lemmi precedenti; tuttavia questo è un assurdo, dal momento che ogni autovalore di  $f|_{W^\perp}$  è anche autovalore di  $f$  e si era supposto che<sup>10</sup>  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  fossero tutti gli autovalori di  $f$ ,  $\neq$ . Quindi  $W = V$ . Pertanto, detta  $\mathcal{B}_i$  una base ortonormale di  $V_{\lambda_i}$ ,  $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^k \mathcal{B}_i$  è una base ortonormale di  $V$ , da cui la tesi.  $\square$

**Corollario 2.3** (teorema spettrale per le matrici). Sia  $A \in M(n, \mathbb{R})$  simmetrica (o appartenente a  $M(n, \mathbb{C})$  ed hermitiana). Allora  $\exists P \in O_n$  (o  $P \in U_n$ ) tale che  $P^{-1}AP = P^\top AP$  (o  $P^{-1}AP = P^*AP$  nel caso hermitiano) sia una matrice diagonale reale.

*Dimostrazione.* Si consideri  $f_A$ , l'operatore indotto dalla matrice  $A$  in  $\mathbb{R}^n$  (o  $\mathbb{C}^n$ ). Allora  $f_A$  è un operatore simmetrico (o hermitiano) sul prodotto scalare (o hermitiano) standard. Pertanto, per il teorema spettrale reale, esiste una base ortonormale  $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  composta di autovettori di  $f_A$ . In particolare, detta  $\mathcal{B}'$  la base canonica di  $\mathbb{R}^n$  (o  $\mathbb{C}^n$ ), vale la seguente identità:

$$M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{Id})^{-1} M_{\mathcal{B}'}(f) M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{Id}),$$

dove  $M_{\mathcal{B}'}(f) = A$ ,  $M_{\mathcal{B}}(f)$  è diagonale, essendo  $\mathcal{B}$  composta di autovettori, e  $P = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$  si configura nel seguente modo:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f) = \left( \underline{v}_1 \mid \dots \mid \underline{v}_n \right).$$

Dacché  $\mathcal{B}$  è ortogonale,  $P$  è anch'essa ortogonale, da cui la tesi.  $\square$

### Osservazione.

► Un importante risultato che consegue direttamente dal teorema spettrale per le matrici riguarda la segnatura di un prodotto scalare (o hermitiano). Infatti, detta  $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ ,  $D = P^\top AP$ , e dunque  $D \cong A$ . Allora, essendo  $D$  diagonale, l'indice di positività è esattamente il numero di valori positivi sulla diagonale, ossia il numero di autovalori positivi di  $A$ . Analogamente l'indice di negatività è il numero di autovalori negativi, e quello di nullità è la molteplicità algebrica di 0 come autovalore (ossia esattamente la dimensione di  $V_\varphi^\perp = \text{Ker } a_\varphi$ ).

**Teorema 2.5** (di triangolazione con base ortonormale). Sia  $f \in \text{End}(V)$ , dove  $(V, \varphi)$  è uno spazio euclideo su  $\mathbb{K}$ . Allora, se  $p_f$  è completamente riducibile in  $\mathbb{K}$ , esiste una base ortonormale  $\mathcal{B}$  tale per cui  $M_{\mathcal{B}}(f)$  è triangolare superiore (ossia esiste una base ortonormale a bandiera per  $f$ ).

*Dimostrazione.* Per il teorema di triangolazione, esiste una base  $\mathcal{B}$  a bandiera per  $f$ . Allora, applicando l'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, si può ottenere da  $\mathcal{B}$  una nuova base  $\mathcal{B}'$  ortonormale e che mantenga le stesse bandiere. Allora, se  $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  è ordinata, dacché  $\text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i)$  è  $f$ -invariante,  $f(\underline{v}_i) \in \text{Span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_i)$ , e quindi  $M_{\mathcal{B}'}(f)$  è triangolare superiore, da cui la tesi.  $\square$

<sup>10</sup>Infatti tale autovalore  $\lambda$  non può già comparire tra questi autovalori, altrimenti, detto  $i \in \mathbb{N}$  tale che  $\lambda = \lambda_i$ ,  $V_{\lambda_i} \cap W^\perp \neq \{0\}$ , violando la somma diretta supposta.

**Corollario 2.4.** Sia  $A \in M(n, \mathbb{R})$  (o  $M(n, \mathbb{C})$ ) tale per cui  $p_A$  è completamente riducibile. Allora  $\exists P \in O_n$  (o  $U_n$ ) tale per cui  $P^{-1}AP = P^\top AP$  (o  $P^{-1}AP = P^*AP$ ) è triangolare superiore.

*Dimostrazione.* Si consideri l'operatore  $f_A$  indotto da  $A$  in  $\mathbb{R}^n$  (o  $\mathbb{C}^n$ ). Sia  $\mathcal{B}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^n$  (o di  $\mathbb{C}^n$ ). Allora, per il teorema di triangolazione con base ortonormale, esiste una base ortonormale  $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  di  $\mathbb{R}^n$  (o di  $\mathbb{C}^n$ ) tale per cui  $T = M_{\mathcal{B}'}(f_A)$  è triangolare superiore. Si osserva inoltre che  $M_{\mathcal{B}}(f_A) = A$  e che  $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f_A) = \left( \underline{v}_1 \mid \dots \mid \underline{v}_n \right)$  è ortogonale (o unitaria), dacché le sue colonne formano una base ortonormale. Allora, dalla formula del cambiamento di base per la applicazioni lineari, si ricava che:

$$A = PTP^{-1} \implies T = P^{-1}TP,$$

da cui, osservando che  $P^{-1} = P^\top$  (o  $P^{-1} = P^*$ ), si ricava la tesi.  $\square$

**Definizione** (operatore normale). Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio euclideo reale. Allora  $f \in \text{End}(V)$  si dice **normale** se commuta con il suo trasposto (i.e. se  $ff^\top = f^\top f$ ). Analogamente, se  $(V, \varphi)$  è uno spazio euclideo complesso, allora  $f$  si dice normale se commuta con il suo aggiunto (i.e. se  $ff^* = f^*f$ ).

**Definizione** (matrice normale). Una matrice  $A \in M(n, \mathbb{R})$  (o  $M(n, \mathbb{C})$ ) si dice **normale** se  $AA^\top = A^\top A$  (o  $AA^* = A^*A$ ).

**Osservazione.**

- ▶ Se  $A \in M(n, \mathbb{R})$  e  $A$  è simmetrica ( $A = A^\top$ ), antisimmetrica ( $A = -A^\top$ ) o ortogonale ( $AA^\top = A^\top A = I_n$ ), sicuramente  $A$  è normale.
- ▶ Se  $A \in M(n, \mathbb{C})$  e  $A$  è hermitiana ( $A = A^*$ ), antihermitiana ( $A = -A^*$ ) o unitaria ( $AA^* = A^*A = I_n$ ), sicuramente  $A$  è normale.
- ▶  $f$  è normale  $\iff M_{\mathcal{B}}(f)$  è normale, con  $\mathcal{B}$  ortonormale di  $V$ .
- ▶  $A$  è normale  $\iff f_A$  è normale, considerando che la base canonica di  $\mathbb{C}^n$  è già ortonormale rispetto al prodotto hermitiano standard.
- ▶ Se  $V$  è euclideo reale,  $f$  è normale  $\iff f_{\mathbb{C}}$  è normale. Infatti, se  $f$  è normale,  $f$  e  $f^\top$  commutano. Allora anche  $f_{\mathbb{C}}$  e  $(f^\top)_{\mathbb{C}} = (f_{\mathbb{C}})^*$  commutano, e quindi  $f_{\mathbb{C}}$  è normale. Ripercorrendo i passaggi al contrario, si osserva infine che vale anche il viceversa.

**Lemma 2.1.** Sia  $A \in M(n, \mathbb{C})$  triangolare superiore e normale (i.e.  $AA^* = A^*A$ ). Allora  $A$  è diagonale.

*Dimostrazione.* Se  $A$  è normale, allora  $(A^*)_i A^i = \overline{A}^i A^i$  deve essere uguale a  $A_i (A^*)^i = A_i \overline{A}_i \forall 1 \leq i \leq n$ . Si dimostra per induzione su  $i$  da 1 a  $n$  che tutti gli elementi, eccetto per quelli diagonali, delle righe  $A_1, \dots, A_i$  sono nulli.

(*passo base*) Si osserva che valgono le seguenti identità:

$$\begin{aligned} \overline{A}^1 A^1 &= |a_{11}|^2, \\ A_1 \overline{A}_1 &= |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \dots + |a_{1n}|^2. \end{aligned}$$

2 Prodotti hermitiani, spazi euclidei e teorema spettrale (non indicizzato)

Dovendo vale l'uguaglianza, si ricava che  $|a_{12}|^2 \dots + |a_{1n}|^2$ , e quindi che  $|a_{1i}|^2 = 0 \implies a_{1i} = 0 \quad \forall 2 \leq i \leq n$ , dimostrando il passo base<sup>11</sup>.

(*passo induttivo*) Analogamente a prima, si considerano le seguenti identità:

$$\begin{aligned}\bar{A}^i A^i &= |a_{1i}|^2 + \dots + |a_{ii}|^2 = |a_{ii}|^2, \\ A_i \bar{A}_i &= |a_{ii}|^2 + |a_{i(i+1)}|^2 + \dots + |a_{in}|^2,\end{aligned}$$

dove si è usato che, per il passo induttivo, tutti gli elementi, eccetto per quelli diagonali, delle righe  $A_1, \dots, A_{i-1}$  sono nulli. Allora, analogamente a prima, si ricava che  $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j \leq n$ , dimostrando il passo induttivo, e quindi la tesi.  $\square$

**Osservazione.**

► Chiaramente vale anche il viceversa del precedente lemma: se infatti  $A \in M(n, \mathbb{C})$  è diagonale,  $A$  è anche normale, dal momento che commuta con  $A^*$ .

► Reiterando la stessa dimostrazione del precedente lemma per  $A \in M(n, \mathbb{R})$  triangolare superiore e normale reale (i.e.  $AA^\top = A^\top A$ ) si può ottenere una tesi analoga.

**Teorema 2.6.** Sia  $(V, \varphi)$  uno spazio euclideo complesso. Allora  $f$  è un operatore normale  $\iff$  esiste una base ortonormale  $\mathcal{B}$  di autovettori per  $f$ .

*Dimostrazione.* Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

( $\implies$ ) Poiché  $\mathbb{C}$  è algebricamente chiuso,  $p_f$  è sicuramente riducibile. Pertanto, per il teorema di triangolazione con base ortonormale, esiste una base ortonormale  $\mathcal{B}$  a bandiera per  $f$ . In particolare,  $M_{\mathcal{B}}(f)$  è sia normale che triangolare superiore. Allora, per il Lemma 1,  $M_{\mathcal{B}}(f)$  è diagonale, e dunque  $\mathcal{B}$  è anche una base di autovettori per  $f$ .

( $\impliedby$ ) Se esiste una base ortonormale  $\mathcal{B}$  di autovettori per  $f$ ,  $M_{\mathcal{B}}(f)$  è diagonale, e dunque anche normale. Allora, poiché  $\mathcal{B}$  è ortonormale, anche  $f$  è normale.  $\square$

**Corollario 2.5.** Sia  $A \in M(n, \mathbb{C})$ . Allora  $A$  è normale  $\iff \exists U \in U_n$  tale che  $U^{-1}AU = U^*AU$  è diagonale.

*Dimostrazione.* Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

( $\implies$ ) Sia  $\mathcal{B}$  la base canonica di  $\mathbb{C}^n$ . Si consideri l'applicazione lineare  $f_A$  indotta da  $A$  su  $\mathbb{C}^n$ . Se  $A$  è normale, allora anche  $f_A$  lo è. Pertanto, per il precedente teorema, esiste una base ortonormale  $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$  di autovettori per  $f_A$ . In particolare,  $U = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(\text{Id}) = \left( \begin{array}{c|ccc|c} \underline{v}_1 & & & & \\ \dots & & & & \\ \underline{v}_n & & & & \end{array} \right)$  è unitaria ( $U \in U_n$ ), dacché le colonne di  $U$  sono ortonormali. Si osserva inoltre che  $M_{\mathcal{B}}(f_A) = A$  e che  $D = M_{\mathcal{B}'}(f_A)$  è diagonale. Allora, per la formula del cambiamento di base per le applicazioni lineari, si conclude che:

<sup>11</sup>Gli altri elementi sono infatti già nulli per ipotesi, essendo  $A$  triangolare superiore

2 Prodotti hermitiani, spazi euclidei e teorema spettrale (non indicizzato)

$$A = UDU^{-1} \implies D = U^{-1}AU = U^*AU,$$

ossia che  $U^*AU$  è diagonale.

( $\Leftarrow$ ) Sia  $D = U^*AU$ . Dacché  $D$  è diagonale,  $D$  è anche normale. Pertanto  $DD^* = D^*D$ . Sostituendo, si ottiene che  $U^*AUU^*A^*U = U^*A^*UU^*AU$ . Ricordando che  $U^*U = I_n$  e che  $U \in U_n$  è sempre invertibile, si conclude che  $AA^* = A^*A$ , ossia che  $A$  è normale a sua volta, da cui la tesi.  $\square$

**Osservazione.**

► Si può osservare mediante l'applicazione dell'ultimo corollario che, se  $A$  è hermitiana (ed è dunque anche normale),  $\exists U \in U_n \mid U^*AU = D$ , dove  $D \in M(n, \mathbb{R})$ , ossia tale corollario implica il teorema spettrale in forma complessa. Infatti  $\overline{D} = D^* = U^*A^*U = U^*AU = D \implies D \in M(n, \mathbb{R})$ .

► Se  $A \in M(n, \mathbb{R})$  è una matrice normale reale (i.e.  $AA^T = A^T A$ ) con  $p_A$  completamente riducibile in  $\mathbb{R}$ , allora è possibile reiterare la dimostrazione del precedente teorema per concludere che  $\exists O \in O_n \mid O^T A O = D$  con  $D \in M(n, \mathbb{R})$ , ossia che  $A = O D O^T$ . Tuttavia questo implica che  $A^T = (O D O^T)^T = O D^T O^T = O D O^T = A$ , ossia che  $A$  è simmetrica. In particolare, per il teorema spettrale reale, vale anche il viceversa. Pertanto, se  $A \in M(n, \mathbb{R})$ ,  $A$  è una matrice normale reale con  $p_A$  completamente riducibile in  $\mathbb{R} \iff A = A^T$ .

**Esercizio 2.** Sia  $V$  uno spazio dotato del prodotto  $\varphi$ . Sia  $W \subseteq V$  un sottospazio di  $V$ . Sia  $\mathcal{B}_W = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k\}$  una base di  $W$  e sia  $\mathcal{B} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k, \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n\}$  una base di  $V$ . Sia  $A = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ . Si dimostrino allora i seguenti risultati.

- (i)  $W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}_i) = 0\}$ ,
- (ii)  $W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid A_{1, \dots, k}[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0\} = [\cdot]_{\mathcal{B}}^{-1}(\text{Ker } A_{1, \dots, k})$ ,
- (iii)  $\dim W^\perp = \dim V - \text{rg}(A_{1, \dots, k})$ ,
- (iv) Se  $\varphi$  è non degenere,  $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$ .

*Soluzione.* Chiaramente vale l'inclusione  $W^\perp \subseteq \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}_i) = 0\}$ . Sia allora  $\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}_i) = 0 \forall 1 \leq i \leq k$  e sia  $\underline{w} \in W$ . Allora esistono  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  tali che  $\underline{w} = \alpha_1 \underline{w}_1 + \dots + \alpha_k \underline{w}_k$ . Pertanto si conclude che  $\varphi(\underline{v}, \alpha_1 \underline{w}_1 + \dots + \alpha_k \underline{w}_k) = \alpha_1 \varphi(\underline{v}, \underline{w}_1) + \dots + \alpha_k \varphi(\underline{v}, \underline{w}_k) = 0 \implies \underline{v} \in W^\perp$ . Pertanto  $W^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}_i) = 0\}$ , dimostrando (i).

Si osserva che  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}_i) = 0 \iff \varphi(\underline{w}_i, \underline{v}) = 0$ . Se  $\varphi$  è scalare, allora  $\varphi(\underline{w}_i, \underline{v}) = 0 \stackrel{\text{def}}{\iff} [\underline{w}_i]_{\mathcal{B}}^T A [\underline{v}]_{\mathcal{B}} = (\underline{e}_i)^T A [\underline{v}]_{\mathcal{B}} = A_i [\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0$ . Pertanto  $\underline{v} \in W^\perp \iff A_i [\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0 \forall 1 \leq i \leq k$ , ossia se  $A_{1, \dots, k} [\underline{v}]_{\mathcal{B}} = 0$  e  $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} \in \text{Ker } A_{1, \dots, k}$ , dimostrando (ii). Analogamente si ottiene la tesi se  $\varphi$  è hermitiano. Applicando la formula delle dimensioni, si ricava dunque che

$\dim W^\top = \dim \text{Ker } A_{1,\dots,k} = \dim V - \text{rg } A_{1,\dots,k}$ , dimostrando (iii).

Se  $\varphi$  è non degenere,  $A$  è invertibile, dacché  $\dim V^\perp = \dim \text{Ker } A = 0$ . Allora ogni minore di taglia  $k$  di  $A$  ha determinante diverso da zero. Dacché ogni minore di taglia  $k$  di  $A_{1,\dots,k}$  è anche un minore di taglia  $k$  di  $A$ , si ricava che anche ogni minore di taglia  $k$  di  $A_{1,\dots,k}$  ha determinante diverso da zero, e quindi che  $\text{rg}(A_{1,\dots,k}) \geq k$ . Dacché deve anche valere  $\text{rg}(A_{1,\dots,k}) \leq \min\{k, n\} = k$ , si conclude che  $\text{rg}(A_{1,\dots,k})$  vale esattamente  $k = \dim W$ . Allora, dal punto (iii), vale che  $\dim W^\perp + \dim W = \dim W^\perp + \text{rg}(A_{1,\dots,k}) = \dim V$ , dimostrando il punto (iv).  $\square$

**Esercizio 3.** Sia  $V$  uno spazio dotato del prodotto  $\varphi$ . Sia  $U \subseteq V$  un sottospazio di  $V$ . Si dimostrino allora i seguenti due risultati.

- (i) Il prodotto  $\varphi$  induce un prodotto  $\tilde{\varphi} : V/U \times V/U \rightarrow \mathbb{K}$  tale che  $\tilde{\varphi}(\underline{v} + U, \underline{v}' + U) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}')$  se e soltanto se  $U \subseteq V^\perp$ , ossia se e solo se  $U \perp V$ .
- (ii) Se  $U = V^\perp$ , allora il prodotto  $\tilde{\varphi}$  è non degenere.
- (iii) Sia  $\pi : V \rightarrow V/V^\perp$  l'applicazione lineare di proiezione al quoziente. Allora  $U^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \tilde{\varphi}(\pi(\underline{v}), \pi(\underline{u})) = 0 \ \forall \underline{u} \in U\} = \pi^{-1}(\pi(U)^\perp)$ .
- (iv) Vale la formula delle dimensioni per il prodotto  $\varphi$ :  $\dim U + \dim U^\perp = \dim V + \dim(U \cap V^\perp)$ .

*Soluzione.* Sia  $\underline{w} = \underline{v} + \underline{u}_1 \in \underline{v} + U$ , con  $\underline{u}_1 \in U$ . Se  $\tilde{\varphi}$  è ben definito, allora deve valere l'uguaglianza  $\varphi(\underline{v}, \underline{v}') = \varphi(\underline{w}, \underline{v}') = \varphi(\underline{v} + \underline{u}_1, \underline{v}') = \varphi(\underline{v}, \underline{v}') + \varphi(\underline{u}_1, \underline{v}')$ , ossia  $\varphi(\underline{u}_1, \underline{v}') = 0 \ \forall \underline{v}' \in V \implies \underline{u}_1 \in V^\perp \implies U \subseteq V^\perp$ . Viceversa, se  $U \subseteq V^\perp$ , sia  $\underline{w}' = \underline{v}' + \underline{u}_2 \in \underline{v}' + U$ , con  $\underline{u}_2 \in U$ . Allora vale la seguente identità:

$$\varphi(\underline{w}, \underline{w}') = \varphi(\underline{v} + \underline{u}_1, \underline{v}' + \underline{u}_2) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}') + \underbrace{\varphi(\underline{v}, \underline{u}_2) + \varphi(\underline{u}_1, \underline{v}') + \varphi(\underline{u}_1, \underline{u}_2)}_{=0}.$$

Pertanto  $\tilde{\varphi}$  è ben definito, dimostrando (i).

Sia ora  $U = V/V^\perp$ . Sia  $\underline{v} + U \in (V/U)^\perp = \text{Rad}(\tilde{\varphi})$ . Allora,  $\forall \underline{v}' + U \in V/U$ ,  $\tilde{\varphi}(\underline{v} + U, \underline{v}' + U) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}') = 0$ , ossia  $\underline{v} \in V^\perp = U$ . Pertanto  $\underline{v} + U = U \implies \text{Rad}(\tilde{\varphi}) = \{V^\perp\}$ , e quindi  $\tilde{\varphi}$  è non degenere, dimostrando (ii).

Si dimostra adesso l'uguaglianza  $U^\perp = \pi^{-1}(\pi(U)^\perp)$ . Sia  $\underline{v} \in U^\perp$ . Allora  $\tilde{\varphi}(\pi(\underline{v}), \pi(\underline{u})) = \tilde{\varphi}(\underline{v} + V^\perp, \underline{u} + V^\perp) = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) = 0 \ \forall \underline{u} \in U$ , da cui si ricava che vale l'inclusione  $U^\perp \subseteq \pi^{-1}(\pi(U)^\perp)$ . Sia ora  $\underline{v} \in \pi^{-1}(\pi(U)^\perp)$ , e sia  $\underline{u} \in U$ . Allora  $\varphi(\underline{v}, \underline{u}) = \tilde{\varphi}(\underline{v} + V^\perp, \underline{u} + V^\perp) = \tilde{\varphi}(\pi(\underline{v}), \pi(\underline{u})) = 0$ , da cui vale la doppia inclusione, e dunque l'uguaglianza desiderata, dimostrando (iii).

Dall'uguaglianza del punto (iii), l'applicazione della formula delle dimensioni e l'identità ottenuta dal punto (iv) dell'*Esercizio 2* rispetto al prodotto  $\tilde{\varphi}$  non degenere, si ricavano le seguenti identità:



$$\begin{cases} \dim \pi(U) = \dim U - \dim(U \cap \text{Ker } \pi) = \dim U - \dim(U \cap V^\perp), \\ \dim \pi(U)^\perp = \dim V/V^\perp - \dim \pi(U) = \dim V - \dim V^\perp - \dim \pi(U), \\ \dim U^\perp = \dim \pi(U)^\perp + \dim \text{Ker } \pi = \dim \pi(U)^\perp + \dim V^\perp, \end{cases}$$

dalle quali si ricava la seguente identità:

$$\dim U^\perp = \dim V - \dim V^\perp - (\dim U - \dim(U \cap V^\perp)) + \dim V^\perp,$$

da cui si ricava che  $\dim U + \dim U^\perp = \dim V + \dim(U \cap V^\perp)$ , dimostrando (iv).  $\square$

**Esercizio 4.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale dotato del prodotto  $\varphi$ . Si dimostri allora che  $(W^\perp)^\perp = W + V^\perp$ .

*Soluzione.* Sia  $\underline{v} = \underline{w}' + \underline{v}' \in W + V^\perp$ , con  $\underline{w}' \in W$  e  $\underline{v}' \in V^\perp$ . Sia inoltre  $\underline{w} \in W^\perp$ . Allora  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \varphi(\underline{w}' + \underline{v}', \underline{w}) = \varphi(\underline{w}', \underline{w}) + \varphi(\underline{v}', \underline{w}) = 0$ , dove si è usato che  $\underline{w}' \perp \underline{w}$  dacché  $\underline{w} \in W^\perp$  e  $\underline{w}' \in W$  e che  $\underline{v}' \in V^\perp$ . Allora vale l'inclusione  $W + V^\perp \subseteq (W^\perp)^\perp$ .

Applicando le rispettive formule delle dimensioni a  $W^\perp$ ,  $(W^\perp)^\perp$  e  $W + V^\perp$  si ottengono le seguenti identità:

$$\begin{cases} \dim W^\perp = \dim V + \dim(W \cap V^\perp) - \dim W, \\ \dim (W^\perp)^\perp = \dim V + \dim(W^\perp \cap V^\perp) - \dim W^\perp, \\ \dim(W + V^\perp) = \dim W + \dim V^\perp - \dim(W \cap V^\perp), \end{cases}$$

da cui si ricava che:

$$\dim (W^\perp)^\perp = \dim W + \dim V^\perp - \dim(W \cap V^\perp) = \dim(W + V^\perp).$$

Dal momento che vale un'inclusione e l'uguaglianza dimensionale, si conclude che  $(W^\perp)^\perp = W + V^\perp$ , da cui la tesi.  $\square$

**Esercizio 5.** Sia  $A \in M(n, \mathbb{C})$  anti-hermitiana (i.e.  $A = -A^*$ ). Si dimostri allora che  $A$  è normale e che ammette solo autovalori immaginari.

*Soluzione.* Si mostra facilmente che  $A$  è normale. Infatti  $AA^* = A(-A) = -A^2 = (-A)A = A^*A$ . Sia allora  $\lambda \in \mathbb{C}$  un autovalore di  $A$  e sia  $\underline{v} \neq \underline{0}$ ,  $\underline{v} \in V_\lambda$ . Si consideri il prodotto hermitiano standard  $\varphi$  su  $\mathbb{C}^n$ . Allora vale la seguente identità:

$$\begin{aligned} \lambda \varphi(\underline{v}, \underline{v}) &= \varphi(\underline{v}, \lambda \underline{v}) = \varphi(\underline{v}, A\underline{v}) = \varphi(A^* \underline{v}, \underline{v}) = \\ &= \varphi(-A\underline{v}, \underline{v}) = \varphi(-\lambda \underline{v}, \underline{v}) = -\bar{\lambda} \varphi(\underline{v}, \underline{v}). \end{aligned}$$

Dacché  $\varphi$  è definito positivo,  $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \neq 0 \implies \lambda = -\bar{\lambda}$ . Allora  $\Re(\lambda) = \frac{\lambda + \bar{\lambda}}{2} = 0$ , e quindi  $\lambda$  è immaginario, da cui la tesi.  $\square$

**Esercizio 6.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale dotato del prodotto  $\varphi$ . Siano  $U, W \subseteq V$  due sottospazi di  $V$ . Si dimostrino allora le due seguenti identità.

(i)  $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$ ,

(ii)  $(U \cap W)^\perp \supseteq U^\perp + W^\perp$ , dove vale l'uguaglianza insiemistica se  $\varphi$  è non degenere.

*Soluzione.* Sia  $\underline{v} \in (U + W)^\perp$  e siano  $\underline{u} \in U \subseteq U + W$ ,  $\underline{w} \in W \subseteq U + W$ . Allora  $\varphi(\underline{v}, \underline{u}) = 0 \implies \underline{v} \in U^\perp$  e  $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \implies \underline{v} \in W^\perp$ , da cui si conclude che  $(U + W)^\perp \subseteq U^\perp \cap W^\perp$ . Sia adesso  $\underline{v} \in U^\perp \cap W^\perp$  e  $\underline{v}' = \underline{u} + \underline{w} \in U + W$  con  $\underline{u} \in U$  e  $\underline{w} \in W$ . Allora  $\varphi(\underline{v}, \underline{v}') = \varphi(\underline{v}, \underline{u}) + \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0 \implies \underline{v} \in (U + W)^\perp$ , da cui si deduca che vale la doppia inclusione, e quindi che  $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$ , dimostrando (i).

Sia ora  $\underline{v}' = \underline{u}' + \underline{w}' \in U^\perp + W^\perp$  con  $\underline{u}' \in U^\perp$  e  $\underline{w}' \in W^\perp$ . Sia  $\underline{v} \in U \cap W$ . Allora  $\varphi(\underline{v}, \underline{v}') = \varphi(\underline{v}, \underline{u}') + \varphi(\underline{v}, \underline{w}') = 0 \implies \underline{v}' \in (U \cap W)^\perp$ , da cui si deduce che  $(U \cap W)^\perp \supseteq U^\perp + W^\perp$ . Se  $\varphi$  è non degenere,  $\dim(U^\perp + W^\perp) = \dim U^\perp + \dim W^\perp - \dim(U^\perp \cap W^\perp) = 2 \dim V - \dim U - \dim W - \dim(U + W)^\perp = \dim V - \dim U - \dim W + \dim(U + W) = \dim V - \dim(U + W) = \dim(U + W)^\perp$ . Valendo pertanto l'uguaglianza dimensionale, si conclude che in questo caso  $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$ , dimostrando (ii). □