Sottoanelli

Def. Sia R un anello. Un sottoinsieme S è un suo sottoanello se è un anello con le operazioni ereditate da R.

es. $\mathbb{K}[x,y] \supseteq \mathbb{K}[x]$

Anelli quoziente su $\mathbb{K}[x]$

Def. Sia $f(x) \in \mathbb{K}[x]$, $r \in \mathbb{K}$ è una radice di $f(x)$ se $f(r) = 0$ (i.e. $a_n r^n + \dots + a_0 = 0$.

Def. Dato $b \in \mathbb{K}$, $\varphi_b : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}$, $p \mapsto p(b)$. Esso è un omomorfismo cui $\operatorname{Im} \varphi_b = \mathbb{K}$.

Oss. $p(b) = 0 \iff \overbrace{p(x) = (x-b)\, q(x)}^{\text{per la div. euclidea}}$, $q(x) \in \mathbb{K}[x]$, inoltre $\deg q(x) = \deg p(x) - 1$.

$$p(x) = (x-b)\, q(x) + h(x) \quad , \deg h(x) < \deg (x-b) = 1$$
$$p(b) = (b-b)\, q(x) + h(x) \implies h(x) = 0.$$

Teorema fondamentale dell'algebra

Ogni polinomio $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ di grado positivo ha una radice $r \in \mathbb{C}$, e ne ha esattamente $\deg f(x)$ (contate con la giusta molteplicità).

OSS. $f(z) = 0 \iff \overbrace{f(\bar{z})}^{=\overline{f(z)}} = 0$, quindi ogni polinomio in $\mathbb{C}[x]$ si scompone come

$$q(x)(x-z)(x-\bar{z}) = q(x)\left(x^2 - \underbrace{(z+\bar{z})}_{2\,\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}}x + \underbrace{z\bar{z}}_{=|z|^2 \in \mathbb{R}}\right).$$

Quindi ogni polinomio $f(x)$ in $\mathbb{R}[x]$ si scrive come prodotto di polinomi di secondo grado per alcuni di primo grado in modo che la somma dei gradi sia $\deg f(x)$.

OSS. Ogni polinomio $f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f(x) \equiv 1 \ (2)$ ammette sempre almeno una soluzione reale.

OSS.
- $\mathbb{K}[x]/(0) \cong \mathbb{K}[x]$
- $\mathbb{K}[x]/(a) \cong \{0\}$

es. Sia $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $f(x) = x^2+1$.

$\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \ni 3x^4 - 5x^3 + x - \sqrt{3} + (x^2+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ($x^2 = -1$, perché $x^2+1 = 0$) $3 - 5x^3 + x - \sqrt{3} + (x^2+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3(x^4-1) + (x^2+1) = 3(x^2+1)(x^2-1) + (x^2+1) =$

$= (x^2+1)$

es. Sia K un campo, R anello, $R \supseteq \mathbb{K}$ sottoanello. Allora R è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Una sua base è $\{x^0 + (f(x)), x^1 + (f(x)), \dots, x^{n-1} + (f(x))\}$ con $n = \deg f(x)$.

Def. Sia $g(x) \in \mathbb{K}[x]$, si definisce $\overline{g(x)} := g(x) + (f(x))$

OSS. $f(\bar{x}) = 0$. $\quad a_n\bar{x}^n + \dots + a_0 = \overline{a_n x^n + \dots + a_0} =$

$= \overline{f(x)} = 0.$

OSS. $\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$ contiene $\mathbb{R}$ e $\bar{x}^2+1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$

Prop. $\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$

Definisco $\varphi_i : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$, $f(x) \mapsto f(i)$.

$\ker \varphi_i = (x^2+1)$. Quindi: $\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$

(perché $\mathrm{Im}\, \varphi_i = \mathbb{C}$). $\square$