Applicazioni nilpotenti e forma di Jordan

Def. Data $f \in End(V)$, si dice che lo spazio V è **IRRIDUCIBILE** se non ammette sottospazi propri f-invarianti che non siano banali.
Si dice che $W \subset V$ f-invariante è irriducibile se lo è rispetto a $f|_W \in End(W)$.

oss. Se $\dim W = 1$, W è sempre irriducibile.

oss. Se $p_f(\lambda)$ è completamente riducibile in $\mathbb{K}[\lambda]$, allora f ammette tutti i suoi autovalori in $\mathbb{K}$. Pertanto, dato un sottospazio $W \neq \{\underline{0}\}$ f-invariante, $p_{f|_W}(\lambda) \mid p_f(\lambda) \Rightarrow$ tutti gli autovalori di $f|_W$ sono autovalori di f, ed in particolare $f|_W$ ammette almeno un autovalore $\lambda_i \in sp(f)$, e quindi un autovettore $\underline{v_i}$ ad esso relativo. Pertanto $\overset{\neq \{\underline{0}\}}{Span(\underline{v_i})} \subset W$ è $f|_W$-invariante: dunque, se $\dim W > 1$, W non è irriducibile; altrimenti $W = Span(\underline{v_i})$. Si conclude quindi che $Span(\underline{v_i})$, al variare degli autovettori $\underline{v_i}$ di un qualsiasi V_{λ_i} con $\lambda_i \in sp(f)$, è l'unico tipo di sottospazio irriducibile di V rispetto a f.

Def. Si dice che $f \in End(V)$ è **NILPOTENTE** se $\exists\, m \in \mathbb{N} \mid f^m = 0$.
Il minimo $m \in \mathbb{N} \mid f^m = 0$ si dice ordine di nilpotenza di f.

Prop. Sia $f \in End(V)$ e sia $\dim V = n \in \mathbb{N}$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni, se $p_f(\lambda)$ e' completamente riducibile in $\mathbb{K}$:

(i) f e' nilpotente,

(ii) $p_f(\lambda) = \lambda^n$,

(iii) $\varphi_f(\lambda) = \lambda^m$, con $m \leq n$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sia λ_i un autovalore di f e $\underline{v_i} \neq \underline{0}$ in V un autovettore ad esso relativo. Sia k l'ordine di nilpotenza di f, allora $f^k = 0 \Rightarrow f^k(\underline{v_i}) = \lambda_i^k \underline{v_i} = \underline{0}$. Poiché $\underline{v_i} \neq \underline{0}$, $\lambda_i^k = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$. Quindi l'unico autovalore di f è 0, e $p_f(\lambda) = \lambda^n$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Poiché $\varphi_f(\lambda) \mid p_f(\lambda)$, $\varphi_f(\lambda) = \lambda^m$, con $m \leq n$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Poiché $\varphi_f(f) = f^m = 0$, f è per definizione nilpotente.

$\square$

OSS. se k e' l'ordine di nilpotenza di f, allora $k \leq n$.

OSS. se α e' un autovalore di f e $\underline{v} \neq \underline{0}$ e' un autovettore ad esso relativo, dato $p \in \mathbb{K}[x]$, $p(f)(\underline{v}) = a_m f^m(\underline{v}) + \dots + a_1 f(\underline{v}) + a_0 \underline{v}$

$= a_m \alpha^m \underline{v} + \dots + a_1 \alpha \underline{v} + a_0 \underline{v} = p(\alpha) \underline{v} \Rightarrow p(\alpha)$ e' un autovalore di $p(f)$.

Def. Dato $\underline{v} \in V$ tale che $f^m(\underline{v}) = \underline{0}$ e che $\mathcal{B} = \{ f^i(\underline{v}) \mid 0 \leq i < m \}$ sia una base di V, si dice che $\mathcal{B}$ è una **BASE CICLICA** di V, e che $\underline{v}$ è un vettore ciclico. Uno spazio si dice ciclico se contiene una base ciclica.

OSS. Se $W \subset V$ è ciclico, W è f-invariante. Infatti $f(f^i(\underline{v})) =$

$$= \begin{cases} \underline{0} & \text{se } i = m-1 \\ f^{i+1}(\underline{v}) & \text{altrimenti} \end{cases} \in W, \text{ per ogni } f^i(\underline{v}) \in \mathcal{B}.$$

Def. Sia $\overset{\neq \underline{0}}{\underline{v}} \in V$ e $f \in \mathrm{End}(V)$ nilpotente. Allora si denota con ciclo di $\underline{v}$ l'insieme $C_{\underline{v}} = \{ f^i(\underline{v}) \mid i \in \mathbb{N} \wedge f^i(\underline{v}) \neq \underline{0} \}$ e $\mathrm{Span}(C_{\underline{v}})$ è detto sottospazio ciclico generato da $\underline{v}$.

OSS. $C_{\underline{v}}$ è sempre finito: dacché f è nilpotente $\exists\, i \in \mathbb{N} \mid f^i(\underline{v}) = \underline{0}$, e $\forall j \geq i$, $f^j(\underline{v}) = f^{j-i}(f^i(\underline{v})) = \underline{0}$. L'$i$ minimo con questa proprietà è detto lunghezza del ciclo (infatti $|C_{\underline{v}}| = i$).

Prop. Sia $\underline{v} \in V$ e $f \in \mathrm{End}(V)$ nilpotente. Allora $C_{\underline{v}}$ è linearmente indipendente.

Sia ℓ la lunghezza del ciclo $C_{\underline{v}}$. Allora $C_{\underline{v}} = \{ \underline{v}, f(\underline{v}), \dots, f^{\ell-1}(\underline{v}) \}$.

$\alpha_0 \underline{v} + \alpha_1 f(\underline{v}) + \dots + \alpha_{\ell-1} f^{\ell-1}(\underline{v}) = \underline{0} \xRightarrow{f} \alpha_0 f(\underline{v}) + \dots +$

$+ \alpha_{\ell-2} f^{\ell-1}(\underline{v}) + \alpha_{\ell-1} \underbrace{f^{\ell}(\underline{v})}_{=\underline{0}} = \underline{0} \overset{f}{\Longrightarrow} \cdots \overset{f}{\Longrightarrow} a_0 \underbrace{f^{\ell-1}(\underline{v})}_{\neq \underline{0}} = \underline{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_0 = 0$. Andando allora a ritroso, $a_1 = \cdots = a_{\ell-1} = 0$. $\square$

Prop. Siano $\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_k} \in V$ e $f \in \mathrm{End}(V)$ nilpotente. Siano $\ell_1, \ldots, \ell_k$ le lunghezze dei cicli $C_{\underline{v_1}}, \ldots, C_{\underline{v_k}}$. Se $I = \{f^{\ell_1-1}(\underline{v_1}), \ldots, f^{\ell_k-1}(\underline{v_k})\}$ e' linearmente indipendente, allora $C_{\underline{v_1}}, \ldots, C_{\underline{v_k}}$ contengono elementi distinti e sono tutti lin. ind.

Per mostrare che $C_{\underline{v_1}}, \ldots, C_{\underline{v_k}}$ contengono elementi distinti è sufficiente dimostrare che $C = C_{\underline{v_1}} \cup \cdots \cup C_{\underline{v_k}}$ è lin. ind.
Sia $\alpha_{1,0}\underline{v_1} + \cdots + \alpha_{1,\ell_1-1} f^{\ell_1-1}(\underline{v_1}) + \cdots + \alpha_{k,\ell_k-1} f^{\ell_k-1}(\underline{v_k}) = \underline{0}$, allora, detto $\ell := \max\{\ell_1, \ldots, \ell_k\}$, applicando f $\ell-1$ volte si otterrà, detti $j_1, \ldots, j_m$ gli indici dei vettori $\underline{v_i} \mid |C_{\underline{v_i}}| = \ell$, che $\alpha_{j_1,0} = \cdots = \alpha_{j_m,0} = 0$, dal momento che gli altri vettori si annullano e che $f^{\ell-1}(\underline{v_{j_1}}), \ldots, f^{\ell-1}(\underline{v_{j_m}})$ sono lin. ind. Reiterando lo stesso ragionamento applicando f $\ell-2, \ldots, 0$ volte si otterrà dunque che $\alpha_{i,j} = 0 \; \forall i,j$, da cui la tesi. $\square$

Teorema Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ nilpotente. Allora $\exists \underline{v_1}, \ldots, \underline{v_k} \overset{\neq \underline{0}}{\in} V \mid C = C_{\underline{v_1}} \cup \cdots \cup C_{\underline{v_k}}$ è una base di V, tali che $C_{\underline{v_1}}, \ldots, C_{\underline{v_k}}$ abbiano elementi distinti, se $n := \dim V \geq 1$.

Si dimostra il teorema per induzione su n.

(passo base) se $n = 1$, poiché f è nilpotente, $p_f(\lambda) = \lambda$. Per il teorema di Hamilton-Cayley, allora, $f = 0$. Pertanto ogni vettore $\underline{v}$ non nullo di V, dacché $f(\underline{v}) = \underline{0}$, genera un ciclo $C_{\underline{v}} = \{\underline{v}\}$ che è base di V.

(passo induttivo) Se $\operatorname{Ker} f = V$, allora $f(\underline{v}) = \underline{0}$; dunque, analogamente a prima, ogni base $\mathcal{B} = \{\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_n}\}$ di V è tale che $\mathcal{B} = \underbrace{C_{\underline{v_1}}}_{\{\underline{v_1}\}} \cup \cdots \cup \underbrace{C_{\underline{v_n}}}_{\{\underline{v_n}\}}$. Altrimenti se $\operatorname{Ker} f \subsetneq V$, si consideri $\operatorname{Im} f$: dacché f è nilpotente, f non può essere invertibile, quindi $\operatorname{rg} f \leq n-1$. Poiché $\operatorname{Im} f$ è f-invariante, $f|_{\operatorname{Im} f} \in \operatorname{End}(\operatorname{Im} f)$; allora, per il passo induttivo, $\exists\ \underline{t_1}, \ldots, \underline{t_k} \in \operatorname{Im} f \mid T = C_{\underline{t_1}} \cup \cdots \cup C_{\underline{t_k}}$ (*) sia una base di $\operatorname{Im} f$. Siano $\underline{v_1}, \ldots, \underline{v_k} \in V \mid \underline{t_i} = f(\underline{v_i})$, allora $C_{\underline{v_i}} = \{\underline{v_i}\} \cup C_{\underline{t_i}}$, (*2) da cui $C = C_{\underline{v_1}} \cup \cdots \cup C_{\underline{v_k}}$ è tale che $|C| = \underbrace{|T|}_{\operatorname{rg} f} + k$. Siano $l_1, \ldots, l_k$ le lunghezze dei cicli $C_{\underline{v_1}}, \ldots, C_{\underline{v_k}}$: allora $f^{l_1 - 1}(\underline{v_1}), \ldots, f^{l_k - 1}(\underline{v_k}) \in \operatorname{Ker} f$ (infatti $f(f^{l_i - 1}(\underline{v_i})) =$ $= f^{l_i}(\underline{v_i}) = \underline{0}$). Si estenda allora $I = \{f^{l_i - 1}(\underline{v_i}) \mid 1 \leq i \leq k\}$ a base di $\operatorname{Ker} f$ $\mathcal{B} = \overbrace{I}^{|I| = k} \cup \{\underline{k_1}, \ldots, \underline{k_m}\}$. Ogni $\underline{k_i}$ genera un ciclo di lunghezza 1 (infatti $f(\underline{k_i}) = \underline{0}$): poiché $\underline{k_i}$ è dunque l'ultimo (e unico) elemento di $C_{\underline{k_i}}$, e $\mathcal{B}$ è lin. ind., $D =$

$= C \cup C_{\underline{k_1}} \cup \dots \cup C_{\underline{k_m}} = C_{\underline{v_1}} \cup \dots \cup C_{\underline{k_m}}$ è linearmente indipendente, per la proposizione precedente. Dacché ogni ciclo è distinto, $|D| = |C| + \underbrace{m}_{\dim \operatorname{Ker} f - k} = (\operatorname{rg} f + k) + (\dim \operatorname{Ker} f - k) =$
$= \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f = n.$ Allora D è una base di V, da cui la tesi. $\square$

(*) Ogni ciclo contiene elementi distinti, come vuole la tesi.

(*²) Ogni $\underline{v_i}$ è distinto (altrimenti esisterebbero due $\underline{t_i}$ uguali, $\lightning$).

OSS. $f \in \operatorname{End}(V)$ induce in modo naturale due catene di inclusione:

(i) $\{\underline{0}\} \subset \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f^3 \subset \cdots$

(ii) $V \supset \operatorname{Im} f \supset \operatorname{Im} f^2 \supset \operatorname{Im} f^3 \supset \cdots$

A loro volta tali catene inducono due successioni limitate

(i) $\underbrace{\dim \{\underline{0}\}}_{0} \leq \dim \operatorname{Ker} f \leq \dim \operatorname{Ker} f^2$, con $n \geq \dim \operatorname{Ker} f^k \ \forall k \in \mathbb{N}$;

(ii) $\underbrace{\dim V}_{n} \geq \operatorname{rg} f \geq \operatorname{rg} f^2$, con $\operatorname{rg} f^k \geq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Pertanto tali catene dovranno stabilizzarsi, ossia $\exists\, m_0 \in \mathbb{N} \mid \operatorname{Ker} f^{m_0} = \operatorname{Ker} f^a \ \forall a \geq m_0$ e analogamente $\exists\, k_0 \in \mathbb{N} \mid \operatorname{Im} f^{k_0} = \operatorname{Im} f^a \ \forall a \geq k_0$.

Dopo aver osservato che esiste sempre una decomposizione di V in sottospazi ciclici generati a partire da un'app. lineare nilpotente, si tenta di costruire in modo operativo una base di questi sottospazi.

Sia m l'indice di nilpotenza di $h \in \mathrm{End}(V)$ nilpotente.
Si considera la seguente catena crescente di sottospazi:

$$\underbrace{\{\underline{0}\}}_{\substack{\ker h \cap \mathrm{Im}\, h^m \\ K^m}} \subset \underbrace{\ker h \cap \mathrm{Im}\, h^{m-1}}_{K^{m-1}} \subset \dots \subset \underbrace{\ker h \cap \mathrm{Im}\, h}_{K^1} \subset \underbrace{\ker h}_{K^0}.$$

Siano $J_1 = m-1$, $J_2 = \max\left\{ \ell \in \mathbb{N} \mid K^{J_1} \subsetneq K^{\ell} \right\}$,
$J_3 = \max\left\{ \ell \in \mathbb{N} \mid K^{J_2} \subsetneq K^{\ell} \right\}$, $\dots$, $J_p = \max\left\{ \ell \in \mathbb{N} \mid K^{J_{p-1}} \subsetneq K^{\ell} \right\}$,
ossia gli indici dei sottospazi distinti della catena raccolti da sinistra non nulli. Vale in particolare che $K^{J_1} = \ker h \cap \mathrm{Im}\, h^{m-1}$ e $K^{J_p} = \ker h$.

Si costruisce una base di $\ker h$ nel seguente modo:

- si prenda una base di K^{J_1}: $\underline{v_{1,1}}, \dots, \underline{v_{1,t_1}}$, dove $t_1 := \dim K^{J_1}$,
- la si estenda a base di $K^{J_2} \supsetneq K^{J_1}$ aggiungendo t_2 vettori di K^{J_2}: $\underline{v_{2,1}}, \dots, \underline{v_{2,t_2}}$,
- si continui fino ad estenderla a base di $K^{J_p} = \ker h$.

OSS. Vale in particolare che $\dim \operatorname{Ker} h = \sum_{i=1}^{p} t_i = \mu_{g,h}(0)$.

Poiché ogni $\underline{v_{r,s}} \in \underbrace{\operatorname{Ker} h \cap \operatorname{Im} h^r}_{K^r}$, $\exists\, \underline{u_{r,s}} \in V \mid \underline{v_{r,s}} = h^r(\underline{u_{r,s}})$. Si consideri allora ogni $C_{\underline{u_{r,s}}}$: poiché i vari $\underline{v_{r,s}} = h^r(\underline{u_{r,s}})$ sono lin. ind., essendo base di Ker h, essendo $r = |C_{\underline{u_{r,s}}}| - 1$, si verifica, per la prop. precedente, che i $C_{\underline{u_{r,s}}}$ sono distinti e che $\bigcup_{i=1}^{p} \bigcup_{s=1}^{t_i} C_{\underline{u_{i,s}}}$ è lin. ind. Sia allora $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{p} \bigcup_{s=1}^{t_i} C_{\underline{u_{i,s}}}$: è sufficiente dimostrare che $\mathcal{B}$ genera V per concludere che $\mathcal{B}$ è una base di V.

Prop. $\mathcal{B}$ genera V.

$\forall\, \underline{v} \in V\ \exists\, \ell \le \overbrace{m}^{\text{indice di nilpotenza}} \mid h^\ell(\underline{v}) = \underline{0}$. Si dimostra allora per induzione su $0 \le \ell \le m$ che se $h^\ell(\underline{v}) = \underline{0}$, $\underline{v} \in \operatorname{Span}(\mathcal{B})$. Per $\ell = 0$, $\underline{v}$ necessariamente è nullo, e quindi $\underline{v} \in \operatorname{Span}(\mathcal{B})$. Per $\ell = 1$, $\underline{v} \in \operatorname{Ker} h \Rightarrow \underline{v} \in \operatorname{Span}(\underline{v_{1,1}}, \ldots, \underline{v_{p,t_p}}) \subset \operatorname{Span}(\mathcal{B})$. Sia ora la tesi vera per $\ell - 1$: se $h^{\ell-1}(\underline{v}) = \underline{0}$, $\underline{v} \in \operatorname{Span}(\mathcal{B})$ per il passo induttivo; altrimenti $h^{\ell-1}(\underline{v}) \in \underbrace{\operatorname{Ker} h \cap \operatorname{Im} h^{\ell-1}}_{K^{\ell-1} = K^{J_s}} \Rightarrow$

$\Rightarrow h^{\ell-1}(\underline{v}) \in \operatorname{Span}(\underbrace{\underline{v_{1,1}}, \ldots, \underline{v_{s,t_s}}}_{\text{base di } K^{J_s}}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow h^{\ell-1}(\underline{v}) = \sum_{1 \le r \le s} \sum_{1 \le k \le t_r} \alpha_{r,k}\, \underline{v_{r,k}} = \sum_{1 \le r \le s} \sum_{1 \le k \le t_r} \alpha_{r,k}\, h^{J_r}(\underline{u_{r,k}}) =$$

$$= \sum_{1 \le r \le s} \sum_{1 \le k \le t_r} \alpha_{r,k}\, h^{\ell-1}(h^{J_r - (\ell-1)}(\underline{u_{r,k}}))$$

(infatti $J_r \ge J_s$ dal momento che $r \le s$). Allora, poiché h è lineare, si verifica che:

$$h^{\ell-1}\Big(\underbrace{\underline{v} - \overbrace{\sum_{1\le r\le s}\ \sum_{1\le k\le t_r} \alpha_{r,k}\, h^{J_r-(\ell-1)}(\underline{u_{r,k}})}^{\in \operatorname{Span}(\mathcal{B})}}_{\underline{z}}\Big) = \underline{0}.$$

Quindi, per il passo induttivo, $\underline{z} \in \operatorname{Span}(\mathcal{B}) \Rightarrow \underline{v} \in \operatorname{Span}(\mathcal{B})$, da cui la tesi. $\square$

Si consideri la seguente tabella.

$$\begin{array}{ccccccc}
\overbrace{\phantom{u_{1,1}}}^{C_1} & \overbrace{\phantom{h(u_{1,1})}}^{C_2} & & & & \overbrace{\phantom{h^{J_1}(u_{1,1}) = v_{1,1}}}^{C_k = C_{J_1+1}} \\
\underline{u_{1,1}} & h(\underline{u_{1,1}}) & \cdots & \cdots & \cdots & h^{J_1}(\underline{u_{1,1}}) = \underline{v_{1,1}} \\
\vdots & \vdots & & & & \vdots \\
\underline{u_{1,t_1}} & h(\underline{u_{1,t_1}}) & \cdots & \cdots & \cdots & h^{J_1}(\underline{u_{1,t_1}}) = \underline{v_{1,t_1}} \\
 & & \underline{u_{2,1}} & h(\underline{u_{2,1}}) & \cdots & h^{J_2}(\underline{u_{2,1}}) = \underline{v_{2,1}} \\
 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & & \underline{u_{2,t_2}} & h(\underline{u_{2,t_2}}) & \cdots & h^{J_2}(\underline{u_{2,t_2}}) = \underline{v_{2,t_2}} \\
 & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & h^{J_p}(\underline{u_{p,t_p}}) = \underline{v_{p,t_p}}
\end{array}$$

Sia c_i il numero di vettori nella colonna C_i. Vale sicuramente che $\sum_{i=1}^{k} c_i = \sum_{r=1}^{p} (J_r+1)\cdot t_r = \overbrace{n}^{\dim V}$. Inoltre, poiché i vari $\underline{v_{r,s}}$ sono una base di $\operatorname{Ker} h$, gli altri sono base di $\operatorname{Im} h$ (sono infatti tutti lin. ind. e $n = \dim \operatorname{Ker} h + \operatorname{rg} h$), e quindi $\sum_{i=1}^{k-1} c_i = \operatorname{rg} h$. Reiterando lo stesso ragionamento, i vettori di C_{k-1} e C_k sono una base di $\operatorname{Ker} h^2$, e quindi $\sum_{i=1}^{k-2} c_i = \operatorname{rg} h^2$.

In generale, allora, vale che:

$$\cdot \sum_{i=1}^{k} c_i = n = rg(h^0) \qquad \cdot \sum_{i=1}^{k-1} c_i = rg(h)$$

$$\cdot \sum_{i=1}^{k-2} c_i = rg(h^2) \quad \dots \quad c_1 = rg\left(h^{\overbrace{j_1}^{m-1}}\right) = rg(h^{m-1}).$$

Detto b_i il numero di vettori in $\mathcal{B}$ tali che il loro ciclo sia lungo i, si hanno le seguenti identità:

$$\cdot\ rg(h^{m-1}) = b_m \qquad \cdot\ rg(h^{m-2}) = 2 \cdot b_m + b_{m-1}$$

$$\cdot\ rg(h^{m-3}) = 3 \cdot b_m + 2 \cdot b_{m-1} + b_{m-2} \quad \dots \quad n = rg(h^0) = m \cdot b_m + \dots + b_1$$

E quindi che:

$$\begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{m \quad m-1 \quad m-2 \quad \cdots\cdots \quad 1}}^{m} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m-1 & m-2 & m-3 & \cdots & 0 \\ m & m-1 & m-2 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rg(h^{m-1}) \\ rg(h^{m-2}) \\ \vdots \\ rg(h^0) = n \end{pmatrix},$$

oppure, dacché $b_1 + \dots + b_m = \dim \ker h = n - rg(h)$:

$$\underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m-1 & m-2 & m-3 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}^{m}}_{A} \begin{pmatrix} b_m \\ b_{m-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rg(h^{m-1}) \\ rg(h^{m-2}) \\ \vdots \\ rg(h) \\ n - rg(h) \end{pmatrix},$$

OSS. Poiché $\det(A) = 1^m = 1 \neq 0$, il sistema è risolvibile ed ammette un'unica soluzione (quindi i b_i sono ben definiti e unici per ogni app. lineare).

Prop. Sia $K \in \mathbb{N}$ il minimo naturale per cui $\operatorname{Im} f^K = \operatorname{Im} f^{K+1}$, allora:

(i) $\operatorname{Im} f^{K+S} = \operatorname{Im} f^K \quad \forall\, s \geq 1$,

(ii) $\operatorname{Ker} f^{K+S} = \operatorname{Ker} f^K \quad \forall\, s \geq 1$,

(iii) K è il minimo naturale per cui $\operatorname{Ker} f^K = \operatorname{Ker} f^{K+1}$.

Si dimostra la (i) per induzione su $s \geq 1$:

(passo base) vero per ipotesi.

(passo induttivo) $\operatorname{Im} f^{K+S+1} = f(\operatorname{Im} f^{K+S}) \overset{\text{ipotesi induttiva}}{=} f(\operatorname{Im} f^K) = \operatorname{Im} f^{K+1} = \operatorname{Im} f^K$.

Dalla formula delle dimensioni si ricava che:

$$\begin{cases} n = \dim \operatorname{Ker} f^K + \operatorname{rg} \operatorname{Im} f^K \\ n = \dim \operatorname{Ker} f^{K+S} + \underbrace{\operatorname{rg} f^{K+S}}_{= \operatorname{rg} f^K,\ \text{per (i)}} \end{cases} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f^K = \dim \operatorname{Ker} f^{K+S}.$$

Poiché $\operatorname{Ker} f^K \subset \operatorname{Ker} f^{K+S}$, si deduce che $\operatorname{Ker} f^{K+S} = \operatorname{Ker} f^K$, da cui la (ii).

Sia t il minimo naturale per cui $\operatorname{Ker} f^t = \operatorname{Ker} f^{t+1}$. Se $t < K$, per la formula delle dimensioni, analogamente a prima, si ricaverebbe $\operatorname{rg} f^t = \operatorname{rg} f^{t+1} \Rightarrow \operatorname{Im} f^t = \operatorname{Im} f^{t+1}$, dacché $\operatorname{Im} f^t \supset \operatorname{Im} f^{t+1}$. Tuttavia ciò violerebbe la minimalità di K, $\lightning$. Pertanto $t = K$, da cui la (iii).

$\square$

Prop. (decomposizione di Fitting) Sia $k \in \mathbb{N}$ il minimo naturale per cui $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1}$. Allora $V = \operatorname{Ker} f^k \oplus \operatorname{Im} f^k$.

Sia $\underline{v} \in \operatorname{Ker} f^k \cap \operatorname{Im} f^k$. Allora $\underline{v} = f^k(\underline{w})$ con $\underline{w} \in V$, da cui $f^{2k}(\underline{w}) =$
$= \underbrace{f^k(\underline{v})}_{\in \operatorname{Ker} f^k} = \underline{0}$. Quindi $\underline{w} \in \operatorname{Ker} f^{2k} = \operatorname{Ker} f^k$, dalla prop. precedente.
Quindi $\underline{v} = f^k(\underline{w}) = \underline{0}$. Pertanto $\operatorname{Ker} f^k$ e $\operatorname{Im} f^k$ sono in somma diretta e $\dim(\operatorname{Ker} f^k \oplus \operatorname{Im} f^k) = \dim \operatorname{Ker} f^k + \underbrace{\dim \operatorname{Im} f^k}_{rg\, f^k} = \dim V$.
Poiché $\operatorname{Ker} f^k \oplus \operatorname{Im} f^k \subset V$, si conclude che $V = \operatorname{Ker} f^k \oplus \operatorname{Im} f^k$. $\square$

Prop. Sia $k \in \mathbb{N}$ il minimo naturale per cui $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1}$.
Allora $f|_{\operatorname{Ker} f^k}$ e' nilpotente e $f|_{\operatorname{Im} f^k}$ non ammette 0 come autovalore.

Dal momento che $f|_{\operatorname{Ker} f^k}^{\,k} = 0$ si deduce che $f|_{\operatorname{Ker} f^k}$ e' per definizione nilpotente. Se $f|_{\operatorname{Im} f^k}$ ammettesse 0 come autovalore, allora non sarebbe iniettiva: tuttavia, dalla formula delle dimensioni, si deduce che $\dim \operatorname{Im} f^k = \dim \operatorname{Ker} f|_{\operatorname{Im} f^k} + \dim \underbrace{\operatorname{Im} f^{k+1}}_{= \operatorname{Im} f^k} \Rightarrow$
$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f|_{\operatorname{Im} f^k} = 0$, $\lightning$

OSS. $p_{f-\lambda_i Id}(\lambda) = p_f(\lambda+\lambda_i)$. Infatti $\det(f-\lambda_i Id - \lambda Id) =$
$= \det(f-(\lambda+\lambda_i)Id) = p_f(\lambda+\lambda_i)$. Pertanto $\mu_{a,f-\lambda_i Id}(0) = \mu_{a,f}(\alpha)$.

Prop. Sia $k \in \mathbb{N}$ il minimo naturale per cui $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1}$.
Allora $\mu_a(0) = \dim \operatorname{Ker} f^k \geq k$.

Per la decomposizione di Fitting, $V = \operatorname{Ker} f^k \oplus \operatorname{Im} f^k$. Allora $p_f(\lambda) =$
$= p_{f|_{\operatorname{Ker} f^k}}(\lambda) \cdot p_{f|_{\operatorname{Im} f^k}}(\lambda)$. Poiché $f|_{\operatorname{Im} f^k}$ non ammette 0 come proprio autovalore, $\lambda^{\mu_a(0)}$, che divide interamente $p_f(\lambda)$, può dividere solo $p_{f|_{\operatorname{Ker} f^k}}(\lambda)$, dacché $\lambda \nmid f|_{\operatorname{Im} f^k}$. Poiché $f|_{\operatorname{Ker} f^k}$ è nilpotente, essa ammette solo 0 come autovalore e $p_{f|_{\operatorname{Ker} f^k}}(\lambda)$ ha grado $\dim \operatorname{Ker} f^k$, si deduce che $\mu_a(0) = \dim \operatorname{Ker} f^k$. Poiché k è il minimo naturale della sua forma, $\underbrace{\dim \operatorname{Ker} f^0}_{0} < \dim \operatorname{Ker} f^1 < \dots < \dim \operatorname{Ker} f^k$, il minimo valore accettabile di $\dim \operatorname{Ker} f^k$ è k, nella configurazione $0<1<\dots<k$.
Quindi $\mu_a(0) = \dim \operatorname{Ker} f^k \geq k$, da cui la tesi. $\square$

OSS. La decomposizione di Fitting ha senso solo se f non è iniettiva, altrimenti: $\operatorname{Im} f = V$, $\operatorname{Ker} f = \{\underline{0}\} \Rightarrow f = \overbrace{\operatorname{Ker} f}^{\{\underline{0}\}} \oplus \overbrace{\operatorname{Im} f}^{V} =$
$= V$.

Def. Si definisce AUTOSPAZIO GENERALIZZATO di f relativo all'autovalore λ_i lo spazio $\widetilde{V}_{\lambda_i}$ tale che:

$$\widetilde{V}_{\lambda_i} = \{ \underline{v} \in V \mid \exists\, k \in \mathbb{N} \mid (f - \lambda_i Id)^k \underline{v} = \underline{0} \}.$$

Prop. Data $f \in End(V)$, vale allora che $\widetilde{V}_{\lambda_i} = \ker (f - \lambda_i Id)^{\mu_{a,f}(\lambda_i)}$.

Sia $\underline{v} \in \widetilde{V}_{\lambda_i}$, allora $\exists\, m \in \mathbb{N} \mid \underline{v} \in \ker (f - \lambda_i Id)^m$. Sia k il minimo naturale per cui $\ker (f - \lambda_i Id)^k = \ker (f - \lambda_i Id)^{k+1}$. Allora, per le precedenti proposizioni, $\ker (f - \lambda_i Id)^t \subset \ker (f - \lambda_i Id)^k$ $\forall\, t \in \mathbb{N}$; quindi, in particolare, $\ker (f - \lambda_i Id)^m \subset \ker (f - \lambda_i Id)^k$. Poiché $\mu_{a, f-\lambda_i Id}(0) \geq k$, vale che $\ker (f - \lambda_i Id)^k = \ker (f - \lambda_i Id)^{\mu_{a, f - \lambda_i Id}(0)}$; infine, dato che $\mu_{a, f-\lambda_i Id}(0) = \mu_{a,f}(\lambda_i)$, per l'osservazione precedente, si ricava che $\ker (f - \lambda_i Id)^m \subset \ker (f - \lambda_i Id)^{\mu_a(\lambda_i)}$, da cui $\underline{v} \in \ker (f - \lambda_i Id)^{\mu_{a,f}(\lambda_i)}$, e dunque che $\widetilde{V}_{\lambda_i} \subset \ker (f - \lambda_i Id)^{\mu_a(\lambda_i)}$.

Per definizione di $\widetilde{V}_{\lambda_i}$ vale anche l'altra inclusione. Pertanto si conclude che $\widetilde{V}_{\lambda_i} = \ker (f - \lambda_i Id)^{\mu_a(\lambda_i)}$.

oss. In base all'osservazione precedente $\widetilde{V}_{\lambda_i}$ può essere ricavato risolvendo il sistema lineare $(M_{\mathcal{B}}(f) - \lambda_i Id)^{\mu_a(\lambda_i)} \underline{v} = \underline{0}$, una volta fissata una base $\mathcal{B}$ di V, convertendo poi $\underline{v}$ da vettore di $\mathbb{K}^n$ ad uno di V con l'isomorfismo del passaggio alle coordinate.

Teorema Sia $f \in \mathrm{End}(V)$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ i suoi autovalori distinti. Allora $V = \widetilde{V}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \widetilde{V}_{\lambda_k}$.

Si dimostra la tesi ricorsivamente. Per la decomposizione di Fitting, $V = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{Id})^k \oplus \mathrm{Im}(f - \lambda_1 \mathrm{Id})^k$, dove k è il minimo naturale tale che $\mathrm{Im}(f - \lambda_1 \mathrm{Id})^k = \mathrm{Im}(f - \lambda_1 \mathrm{Id})^{k+1}$. Allora, poiché $\mu_{a,f}(\lambda_1) = \mu_{a, f-\lambda_1 \mathrm{Id}}(0) \geq k$, $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{Id})^k = \widetilde{V}_{\lambda_1}$ e $\mathrm{Im}(f - \lambda_1 \mathrm{Id})^k = \mathrm{Im}(f - \lambda_1 \mathrm{Id})^{\mu_{a,f}(\lambda_1)} := \underline{V}|_{\lambda_1}$. Quindi si ricava che $V = \widetilde{V}_{\lambda_1} \oplus \underline{V}|_{\lambda_1}$. Poiché $(f - \lambda_1 \mathrm{Id})|_{\widetilde{V}_{\lambda_1}}$ è nilpotente, $p_{f-\lambda_1 \mathrm{Id}|_{\widetilde{V}_{\lambda_1}}}(\lambda) = \lambda^{\mu_{a,f}(\lambda_1)} \Rightarrow p_{f|_{\widetilde{V}_{\lambda_1}}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\mu_{a,f}(\lambda_1)}$. Poiché $p_f(\lambda) = p_{f|_{\widetilde{V}_{\lambda_1}}}(\lambda)\, p_{f|_{\underline{V}|_{\lambda_1}}}(\lambda)$ e λ_1 ha in $p_f(\lambda)$ molteplicità $\mu_{a,f}(\lambda_1)$, $(\lambda - \lambda_1) \nmid p_{f|_{\underline{V}|_{\lambda_1}}}(\lambda)$, quindi λ_1 non è autovalore di $f|_{\underline{V}|_{\lambda_1}}$.
Si può ora considerare $\underline{V}|_{\lambda_1}$ al posto di V e $f|_{\underline{V}|_{\lambda_1}}$ al posto di f [(*)] e si reitera il ragionamento per un altro autovalore distinto da λ_1 al posto di λ_1, a meno che non ve ne siano (in tal caso $\underline{V}|_{\lambda_1}$ ha dimensione nulla, dacché $\dim \underline{V}|_{\lambda_1} = \underbrace{\dim V}_{n} - \underbrace{\dim \widetilde{V}_1}_{\mu_{a,f}(\lambda_1) = n} = 0$).
Si è dunque ottenuta la decomposizione desiderata, ossia $V = \widetilde{V}_{\lambda_1} \oplus (\widetilde{V}_{\lambda_2} \oplus (\widetilde{V}_{\lambda_3} \oplus \cdots))) = \widetilde{V}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \widetilde{V}_{\lambda_k}$. $\square$

(*) ciò è possibile perché $\underline{V}|_{\lambda_1}$ è f-invariante.

OSS. Se $\mu_{a,f}(\lambda) = \mu_{g,f}(\lambda)$, $\dim V_\lambda = \dim \widetilde{V}_\lambda \implies V_\lambda = \widetilde{V}_\lambda$.

Def. Si definisce **BLOCCO DI JORDAN** di taglia m relativo all'autovalore λ la matrice $J_{\lambda,m}$ definita in modo tale che:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{bmatrix} \in M(m, \mathbb{K}),$$

ossia con il solo valore λ sulla diagonale, 1 sulla superdiagonale e 0 altrove.

OSS. $\det(J_{\lambda,m}) = \lambda^m$, $\operatorname{rg}(J_{\lambda,m}) = \begin{cases} m-1 & \text{se } \lambda = 0 \\ m & \text{altrimenti} \end{cases}$, $\operatorname{tr}(J_{\lambda,m}) = m\lambda$,

$p_{J_{\lambda,m}}(t) = (\lambda - t)^m$.

OSS. Poiché $p_{J_{\lambda,m}}(t) = (\lambda - t)^m$ e $\varphi_{J_{\lambda,m}}(t) \mid p_{J_{\lambda,m}}(t)$,

$\varphi_{J,m}(t) = (t-\lambda)^k$ con $k \leq m$.

OSS. Si consideri $M = J_{\lambda,m} - \lambda\, Id = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$. Per annullare M^k è necessario che k valga almeno m: così facendo

$$\underline{e_m} \overset{M}{\longmapsto} \underline{e_{m-1}} \overset{M}{\longmapsto} \cdots \overset{M}{\longmapsto} \underline{e_1} \overset{M}{\longmapsto} \underline{0},$$

e dunque M^m vale $\underline{0}$ su ogni elemento della base (M non può essere composta meno di m volte, altrimenti $M^k(\underline{e_m}) \neq \underline{0}$). Dunque $\varphi_{J_{\lambda,m}}(t) = (t-\lambda)^m$, ossia è associato a $p_{J_{\lambda,m}}(t)$, da cui si deduce che $\ker \sigma_{J_{\lambda,m}} = (p_{J_{\lambda,m}})$ (i.e. anche $p_{J_{\lambda,m}}$, in quanto associato a $\varphi_{J_{\lambda,m}}$, è generatore di $\ker \sigma_{J_{\lambda,m}}$).

OSS. $J_{\lambda,m} - \lambda Id$ è sempre nilpotente.

Def. Si definisce FORMA CANONICA DI JORDAN relativa agli autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_h$, con numero di blocchi rispettivi per ogni λ_i detto k_i e lunghezze di ogni blocco di λ_i dette $m_{i,j}$ con $1 \le j \le k_i$, una matrice J della forma:

$$J = \begin{bmatrix} \overbrace{J_{\lambda_1, m_{1,1}} \ \ddots \ J_{\lambda_1, m_{1,k_1}}}^{k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\lambda_h, m_{h,k_h}} \end{bmatrix} \in M\left(\sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k_i} m_{i,j}, \mathbb{K}\right).$$

OSS. $\det(J) = \prod_{i=1}^{h} \prod_{j=1}^{k_i} \overbrace{\det(J_{\lambda_i, m_{i,j}})}^{\lambda_i^{m_{i,j}}} = \prod_{i=1}^{h} \lambda_i^{\sum_{j=1}^{k_i} m_{i,j}}$. Inoltre $p_J(\lambda) = \prod_{i=1}^{h} \prod_{j=1}^{k_i} \underbrace{p_{J_{\lambda_i, m_{i,j}}}(\lambda)}_{(\lambda-\lambda_i)^{m_{i,j}}} = \prod_{i=1}^{h} (\lambda - \lambda_i)^{\sum_{j=1}^{k_i} m_{i,j}}$, da cui si ricava, poiché i λ_i sono distinti, che $\mu_{a,J}(\lambda_i) = \sum_{j=1}^{k_i} m_{i,j}$.

OSS. $\varphi_J(\lambda)$ è allora della forma $(\lambda-\lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda-\lambda_h)^{n_h}$ con $n_i \le \mu_{a,J}(\lambda_i)$. Poiché J è diagonale a blocchi, J^k sarà anch'essa diagonale a blocchi, con i rispettivi blocchi di J elevati alla k. Allora, per computare $\varphi_J(\lambda)$ è sufficiente considerare individualmente i blocchi relativi ad ogni autovalore λ_i: per annullarli tutti è necessario e sufficiente che $\mathrm{mcm}\left(\varphi_{J_{\lambda_i, m_{i,1}}}, \ldots, \varphi_{J_{\lambda_i, m_{i,k_i}}}\right)$ divida $\varphi_J(\lambda)$, ossia che $n_i = \max\{m_{i,1}, \ldots, m_{i,k_i}\}$. Quindi vale che $\varphi_J(\lambda) = \prod_{i=1}^{h} (\lambda - \lambda_i)^{\max\{m_{i,1}, \ldots, m_{i,k_i}\}}$.

OSS. $\operatorname{tr}(J) = \sum_{i=1}^{h} \mu_{a,J}(\lambda_i)\,\lambda_i$.

Teorema Sia $f \in \operatorname{End}(V)$. Allora esiste una base $\mathcal{B}$ tale per cui $M_{\mathcal{B}}(f)$ è una forma canonica di Jordan. Inoltre due forme canoniche di Jordan sono simili se e solo se contengono gli stessi identici blocchi di Jordan, benché permutati.

Traccia della dimostrazione:

(i) Si mostra che esistono, e sono unici, i sottospazi $U_1, \ldots, U_h$, dati $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ autovalori di f, f-invarianti tali che $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_h$ e che U_i sia il massimo sottospazio f-invariante in cui f contiene solo l'autovalore λ_i (i.e. $\lambda_i \in sp(f|_{U_i}) \wedge \lambda_j \notin sp(f|_{U_i}),\ j \neq i$).

(ii) Si considera $f_i = f|_{U_i}$ e si osserva che $h_i = f_i - \lambda_i Id$ è nilpotente. Si dimostra che U_i si decompone in una somma diretta di sottospazi ciclici $U'_{i,1}, \ldots, U'_{i,k_i}$ e che, prese le rispettive basi cicliche, la matrice associata di h_i nell'unione di tali basi risulta diagonale a blocchi di Jordan della forma $J_{0,m_{i,j}}$; pertanto la matrice associata di f_i sarà a blocchi della forma $J_{\lambda_i, m_{i,j}}$.

(i) Da prima, si può considerare $V = \widetilde{V_{\lambda_1}} \oplus \cdots \oplus \widetilde{V_{\lambda_k}}$, dal momento che $\tilde{V}_i$ è sempre f-invariante $\left((f - \lambda_i Id)^{\mu_a(\lambda_i)} \circ f(\underline{v}) = f \circ (f - \lambda_i Id)^{\mu_a(\lambda_i)}(\underline{v}) = \underline{0} \right.$, con $\left. \underline{v} \in \widetilde{V_{\lambda_i}} \right)$ e $\lambda_i \in sp(f|_{\widetilde{V_{\lambda_i}}})$ e $\lambda_j \notin sp(f|_{\widetilde{V_{\lambda_i}}})$ per $i \neq j$.