Teoria degli insiemi

- Assiomi di Zermelo-Fraenkel ZF + assioma della scelta (AC) (ZFC).
- Si definisce l'unione anche su una famiglia di insiemi (i.e. insieme di insiemi), come $\bigcup \mathcal{J}$ o $\bigcup_{i \in I} A_i$ se $\mathcal{J} = \{A_i \mid i \in I\}$.
- Analogamente con l'intersezione $\cap$ e la diff. simm. Δ.
- $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

Una funzione $f: A \to B$ è un sottinsieme $G \subset A \times B \mid \forall a \in A \; \exists! b \in B \mid (a,b) \in G$. In particolare:

(i) $Gr(f) := G$

(ii) $f(a) = b \overset{def}{\iff} (a,b) \in Gr(f)$

(iii) f surgettiva $\overset{def}{\iff} \forall b \in B \; \exists a \in A \mid (a,b) \in Gr(f)$

(iv) f iniettiva $\overset{def}{\iff} \forall a_1, a_2 \in A, \; (a_1, B) \in Gr(f) \wedge (a_2, B) \in Gr(f) \Rightarrow$
$\Rightarrow a_1 = a_2 \iff \forall b \in B \left(\exists! \, a \in A \mid (a,b) \in Gr(f)\right) \vee$
$\vee \left(\nexists \, a \in A \mid (a,b) \in Gr(f)\right)$

(v) f bigettiva $\overset{def}{\iff}$ f iniettiva e surgettiva

- $A^n := \underbrace{A \times \dots \times A}_{n \text{ volte}}$

- $\mathcal{P}(A) = \{C \mid C \subseteq A\}$. Dato $E \subset A$, definisco la funzione indicatrice $\chi_E = 1_E : A \to \{0,1\}$. L'insieme delle funzioni indicatric è isomorfo a $\mathcal{P}(A)$. χ_E è detta anche funzione caratteristica. $\mathcal{P}(A)$ si indica anche come 2^A.

- $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ (numeri naturali) $\quad \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N}^+$
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \dots\}$ (numeri interi) o equivalentemente sia $(p,q) \sim (p',q') \overset{def}{\iff} p + q' = p' + q$, allora $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$.
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*, (p,q) = 1\} = \{(p,q) \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*, (p,q) = 1\}$

  o equivalentemente sia $(p,q) \sim (p',q') \overset{def}{\iff} pq' = p'q$, allora

  $\mathbb{Q} = \{(p,q) \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\} / \sim$.
- $\mathbb{R} = \{$numeri con espansione decimale infinita$\}$

Def. $|A| = |B| \iff \exists f : A \to B$ bigettiva (A e B sono equipotenti)

Def. A è finito se $\exists m \ \exists f : \{1, \dots, m\} \to A$ è bigettiva

OSS. A è finito $\Rightarrow \exists! \, m \ \exists f : \{1, \dots, m\} \to A$ è bigettiva

OSS. $A \sim B \overset{def}{\iff} |A| = |B|$ è "una rel. d'equivalenza" (senza un insieme ambiente, non esiste l'insieme universo).

Def. A è numerabile $\overset{def}{\iff}$ A è finito $\vee$ $|A| = |\mathbb{N}|$

Lemma A è numerabile non vuoto (i) $\iff$ $\exists f : \mathbb{N} \to A$ surgettiva (ii)

(i) $\Rightarrow$ (ii): Se A è finito, $\exists f : A \to I_n$ bigettiva $\Rightarrow$ $\exists f^{-1} : I_m \to A$ bigettiva, che estesa a $\mathbb{N}$ con $f(\mathbb{N} \setminus I_m) = \{f(1)\}$. Tale $f|_{\mathbb{N}}$ è surgettiva. Se A è infinito, $\exists f : \mathbb{N} \to A$ bigettiva, quindi surgettiva.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Se A è finito, A è numerabile. Se A è infinito, sia $m \sim n \overset{def}{\iff} f(m) = f(n)$. Costruisco $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ t.c. $g(0) = 0$, $g(1) = \min(\mathbb{N} \setminus [g(0)])$, $g(2) = \min(\mathbb{N} \setminus ([g(0)] \cup [g(1)]))$, ...
$f \circ g$ è bigettiva: iniettiva perché ogni $g(m)$ è equivalente solo a sé stesso, surgettiva perché prende in considerazione tutte le classi di eq.
Quindi $|A| = |\mathbb{N}|$.

$\boxtimes$

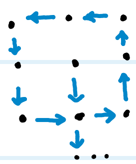
Es. I seguenti insiemi sono tutti numerabili infiniti:

- $\mathbb{Z}$ • $\mathbb{Q}$ • $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ • $\overline{\mathbb{Q}}$

Corollario Se $\underset{\neq \emptyset}{B} \subset A$, A numerabile $\Rightarrow$ B numerabile

A numerabile $\Rightarrow \exists\, f : \mathbb{N} \to A$ surgettiva. Costruisco $g : \mathbb{N} \to B$ t.c.

$g(n) = \begin{cases} f(n) & \text{se } f(n) \in B \\ d & \text{altrimenti} \end{cases}$ dove $d \in B$. g è surgettiva, quindi B è numerabile. $\square$

OSS.  conta tutti i punti di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (i.e. $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$).

Poiché $\mathbb{Q} \longleftrightarrow A = \{ (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^+,\ (p,q) = 1 \} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Allora $|\mathbb{Q}| = |A| = |\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

Lemma $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ e A_i numer. $\forall\, i \in I$, allora A è numerabile.

Sia $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$ t.c. $f(n,m) = \underbrace{f_n}(m)$.

$f_m : \mathbb{N} \to A_m$ surgettiva.

f è surgettiva. Sia $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ bigettiva (esiste perché $|\mathbb{N} \times \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}|$). Allora $f \circ g$ è surgettiva, quindi $|A| = |\mathbb{N}|$.

$\square$

OSS. Sia $A_m = \{ \text{radici di un } p(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid \deg p(x), |a_0|, |a_1|, \ldots, |a_m| \leq m \}$. $|A_m| \leq (2m+1)^m m$ (i.e. A_m è finito).

Poiché $\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$, segue che $|\overline{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{N}|$.

Lemma Il prodotto di insiemi numerabili è numerabile.

es. $\mathbb{R}$ e $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ non sono numerabili, ma hanno la cardinalità del continuo (vd. argomento diagonale di Cantor).

Teorema (Cantor – Bernstein – Schröder)

$$|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$$