Note del corso di Analisi matematica 1

Gabriel Antonio Videtta

21 marzo 2023

Limiti di funzioni e funzioni continue

Nota. Nel corso del documento, per un insieme X, qualora non specificato, si intenderà sempre un sottoinsieme generico dell'insieme dei numeri reali esteso $\overline{\mathbb{R}}$. Analogamente per f si intenderà sempre una funzione $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Definizione. (continuità in un punto) Sia $\overline{x} \in X$. Allora f si dice *continua* su $\overline{x}$ se e solo se $\forall\, I$ intorno di $f(\overline{x})$ $\exists\, J$ intorno di $\overline{x}$ tale che $f(J \cap X) \subseteq I$. Conseguentemente f si dirà *discontinua* su $\overline{x}$ se non è continua su $\overline{x}$.

Definizione. (continuità di una funzione) Si dice che f è una *funzione continua* se e solo se f è continua su $\overline{x}$ $\forall\, \overline{x} \in X$.

Definizione. (punti di accumulazione e punti isolati) Si dice che $\overline{x} \in \overline{\mathbb{R}}$ è un *punto di accumulazione* di X se $\forall\, I$ intorno di x $\exists\, x \in X$, $x \neq \overline{x} \mid x \in I$, o equivalentemente se $I \cap X \setminus \{\overline{x}\} \neq \varnothing$. Analogamente un punto che non è di accumulazione e che appartiene a X si dice *punto isolato*.

Definizione. (derivato di un insieme) Si definisce derivato di X l'insieme dei punti di accumulazione di X, e si denota con $D(X)$.

Definizione. (chiusura di un insieme) Si definisce chiusura di X l'unione di X ai suoi punti di accumulazione, ossia $\bar{X} = X \cup D(X)$.

Proposizione. Sono equivalenti i seguenti fatti:

1. $\overline{x}$ è un punto di accumulazione di X,
2. esiste una successione $(x_n) \subseteq X \setminus \{\overline{x}\}$ tale che $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

($\implies$) Se $\overline{x} \in \mathbb{R}$, per ogni n si consideri l'intorno $I_n = [\overline{x} - \frac{1}{n}, \overline{x} + \frac{1}{n}]$, e si estragga un elemento $k \in I_n \cap X \setminus \{\overline{x}\}$ (che per ipotesi esiste, dacché $\overline{x}$ è un punto di accumulazione). Si ponga dunque $x_n = k$. Poiché $\lim_{n\to\infty} \overline{x} - \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \overline{x} + \frac{1}{n} = \overline{x}$ e $x_n \in I_n \; \forall \, n \in \mathbb{N}$, allora $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$.

Altrimenti, se $\overline{x}$ non è finito, si consideri il caso $\overline{x} = +\infty$. Per ogni n si consideri allora l'intorno $I_n = [n, \infty]$, e si estragga, come prima, $k \in I_n \cap X \setminus \{\overline{x}\}$, ponendo infine $x_n = k$. Poiché $I_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \{\infty\}$, $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$. Analogamente si dimostra il caso $\overline{x} = -\infty$.

($\impliedby$) Se esiste una tale successione, allora $\forall \, I$ intorno di $\overline{x}$ $\exists \, n_k \in \mathbb{N} \mid n \geq n_k \implies x_n \in I$, ed in particolare, poiché per ipotesi $x_n \neq \overline{x}$, $x_n \in X \, \forall \, n \in \mathbb{N}$, I contiene sempre un punto diverso da $\overline{x}$ ed appartenente ad X, ossia $I \cap X \setminus \{\overline{x}\}$. $\square$

Osservazione. Negando la definizione di punto di accumulazione, si ricava che $\overline{x} \in X$ è un punto isolato $\iff \exists \, I$ intorno di $\overline{x} \mid I \cap X = \{\overline{x}\}$.

Definizione. (limite di una funzione) Sia $\overline{x} \in D(X)$. Allora $\lim_{x\to\overline{x}} f(x) = L \overset{\text{def}}{\iff} \forall \, I$ intorno di L, $\exists \, J$ intorno di $\overline{x} \mid f(J \cap X \setminus \{\overline{x}\}) \subseteq I$.

Osservazione. La definizione di limite di una funzione richiede che $\overline{x}$ sia un punto di accumulazione di X per due principali motivi, uno teorico e uno strettamente pratico:

1. se $\overline{x}$ fosse un punto isolato, allora esisterebbe sicuramente un suo intorno J tale che $J \cap X \setminus \{\overline{x}\} = \varnothing$, e quindi $f(J \cap X \setminus \{\overline{x}\}) = f(\varnothing) = \varnothing \in I$, per qualsiasi intorno I scelto, a prescindere da L; si perderebbe dunque una proprietà fondamentale del limite, ovverosia la sua unicità.

2. se $\overline{x}$ fosse un punto isolato, non vi sarebbe alcun modo di "predirre" il comportamento di f nel momento in cui tende a $\overline{x}$, dacché non si potrebbero computare valori per x "vicine" a $\overline{x}$.

Proposizione. Se $\overline{x} \in D(X)$, sono equivalenti i seguenti fatti:

1. $\lim_{x\to\overline{x}} f(x) = L$,

2. $\forall$ successione $(x_n) \subseteq X \setminus \{\overline{x}\}$ tale che $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$, $f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} L$.

Dimostrazione. Si dimostrano le due implicazioni separatamente.

($\implies$) Sia $(x_n) \subseteq X \setminus \{\overline{x}\}$ una successione tale che $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$. Poiché $\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = L$, $\forall\, I$ intorno di L, $\exists\, J$ intorno di $\overline{x}$ tale che $f(J \cap X \setminus \{\overline{x}\}) \subseteq I$. Allo stesso tempo, poiché $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$ e J è un intorno di $\overline{x}$, esiste un $n_k \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq n_k \implies x_n \in J \implies f(x_n) \in I$ (infatti x_n per definizione appartiene a X ed è sempre diverso da $\overline{x}$). Allora $\forall\, I$ intorno di L, $\exists\, n_k$ tale che $n \geq n_k \implies f(x_n) \in I$, ossia $f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} L$.

($\impliedby$) Si ponga per assurdo che $\lim_{x \to \overline{x}} f(x) \neq L$. Allora esiste almeno un intorno I di L tale per cui non esista alcun intorno J di $\overline{x} \mid f(J \cap X \setminus \{\overline{x}\}) \subseteq I$. Si consideri adesso il caso $\overline{x} \in \mathbb{R}$ ed il suo intorno $J_n = [\overline{x} - \frac{1}{n}, \overline{x} + \frac{1}{n}]$: da ogni J_n si può estrarre un $k \in X \setminus \{\overline{x}\}$ (infatti $\overline{x}$ è un punto di accumulazione), tale che $f(k) \notin I$. Si ponga allora $x_n = k$. Dal momento che $J_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \{\overline{x}\}$, $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$. Allo stesso tempo, per $n \to \infty$, $f(x_n)$ non può tendere a L, dacché per costruzione $f(x_n)$ non appartiene all'intorno I. Tuttavia ciò contraddice l'ipotesi, e quindi $\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = L$.

Altrimenti, se $\overline{x} = \infty$, si consideri per ogni n l'intorno $J_n = [n, \infty]$, e se ne estragga $k \in X \setminus \{\overline{x}\}$ tale che $f(k) \notin I$ (come prima, questo deve esistere dacché $\overline{x}$ è un punto di accumulazione). Si ponga dunque $x_n = k$. Poiché $J_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \{\infty\}$, $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \overline{x}$. Tuttavia $f(x_n)$ non può tendere a L per $n \to \infty$, dal momento che $f(x_n)$ per costruzione non appartiene mai all'intorno I. Questo contraddice nuovamente l'ipotesi, e quindi $\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = L$. $\square$

Esercizio 1. Si dimostri che $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

Esercizio 2. Si mostri che l'ipotesi che la successione (x_n) non abbia elementi uguali a $\overline{x}$ sia necessaria, riportando un controesempio.