Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

22 marzo 2023

Introduzione al prodotto scalare

Nota. Nel corso del documento, per V, qualora non specificato, si intenderà uno spazio vettoriale di dimensione finita n.

Definizione. Un **prodotto scalare** su V è una forma bilineare simmetrica φ con argomenti in V.

Esempio. Sia $\varphi : M(n, \mathbb{K})^2 \to \mathbb{K}$ tale che $\varphi(A, B) = \operatorname{tr}(AB)$.

▶ $\varphi(A + A', B) = \operatorname{tr}((A + A')B) = \operatorname{tr}(AB + A'B) = \operatorname{tr}(AB) + \operatorname{tr}(A'B) = \varphi(A, B) + \varphi(A', B)$ (linearità nel primo argomento),
▶ $\varphi(\alpha A, B) = \operatorname{tr}(\alpha AB) = \alpha \operatorname{tr}(AB) = \alpha\varphi(A, B)$ (omogeneità nel secondo argomento),
▶ $\varphi(A, B) = \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) = \varphi(B, A)$ (simmetria),
▶ poiché φ è simmetrica, φ è lineare e omogenea anche nel secondo argomento, e quindi è una forma bilineare simmetrica, ossia un prodotto scalare su $M(n, \mathbb{K})$.

Definizione. Si definisce prodotto scalare *canonico* di $\mathbb{K}^n$ la forma bilineare simmetrica φ con argomenti in $\mathbb{K}^n$ tale che:

$$\varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Osservazione. Si può facilmente osservare che il prodotto scalare canonico di $\mathbb{K}^n$ è effettivamente un prodotto scalare.

▶ $\varphi((x_1, ..., x_n) + (x'_1, ..., x'_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^n (x_i + x'_i) y_i = \sum_{i=1}^n [x_i y_i + x'_i y_i] = \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n x'_i y_i = \varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) + \varphi((x'_1, ..., x'_n), (y_1, ..., y_n))$ (linearità nel primo argomento),

► $\varphi(\alpha(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^n \alpha x_i y_i = \alpha \sum_{i=1}^n x_i y_i = \alpha\varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n))$ (omogeneità nel primo argomento),
► $\varphi((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \varphi((y_1, ..., y_n), (x_1, ..., x_n))$ (simmetria),
► poiché φ è simmetrica, φ è lineare e omogenea anche nel secondo argomento, e quindi è una forma bilineare simmetrica, ossia un prodotto scalare su $\mathbb{K}^n$.

Esempio. Altri esempi di prodotto scalare sono i seguenti:

► $\varphi(A, B) = \mathrm{tr}(A^\top B)$ per $M(n, \mathbb{K})$,
► $\varphi(p(x), q(x)) = p(a)q(a)$ per $\mathbb{K}[x]$, con $a \in \mathbb{K}$,
► $\varphi(p(x), q(x)) = \sum_{i=1}^n p(x_i)q(x_i)$ per $\mathbb{K}[x]$, con x_1, ..., x_n distinti,
► $\varphi(p(x), q(x)) = \int_a^b p(x)q(x)dx$ per lo spazio delle funzioni integrabili su $\mathbb{R}$, con a, b in $\mathbb{R}$,
► $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^\top A\underline{y}$ per $\mathbb{K}^n$, con $A \in M(n, \mathbb{K})$ simmetrica.

Definizione. Sia[1] $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Allora un prodotto scalare φ si dice **definito positivo** se $\underline{v} \in V$, $\underline{v} \neq \underline{0} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0$. Analogamente φ è **definito negativo** se $\underline{v} \neq \underline{0} \implies \varphi(\underline{v}, \underline{v}) < 0$.

Infine, φ è **semidefinito positivo** se $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \geq 0 \ \forall \, \underline{v} \in V$ (o **semidefinito negativo** se invece $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) \leq 0 \ \forall \, \underline{v} \in V$).

Esempio. Il prodotto scalare canonico di $\mathbb{R}^n$ è definito positivo: infatti $\varphi((x_1, ..., x_n), (x_1, ..., x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \iff x_i = 0, \ \forall 1 \leq i \leq n \iff (x_1, ..., x_n) = \underline{0}$.

Al contrario, il prodotto scalare $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ non è definito positivo: $\varphi((x, y), (x, y)) = 0, \ \forall \ (x, y) \mid x^2 = y^2$, ossia se $y = x$ o $y = -x$.

Definizione. Dato un prodotto scalare φ di V, ad ogni vettore $\underline{v} \in V$ si associa una **forma quadratica** $q : V \to \mathbb{K}$ tale che $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v})$.

Osservazione. Si osserva che q non è lineare in generale: infatti $q(\underline{v} + \underline{w}) \neq q(\underline{v}) + q(\underline{w})$ in $\mathbb{R}^n$.

Definizione. Un vettore $\underline{v} \in V$ si dice **isotropo** rispetto al prodotto scalare φ se $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 0$.

[1] In realtà, la definizione è facilmente estendibile a qualsiasi campo, purché esso sia ordinato.

Esempio. Rispetto al prodotto scalare $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3$, i vettori isotropi (x, y, z) sono quelli tali che $x^2 + y^2 = z^2$, ossia i vettori stanti sul cono di eq. $x^2 + y^2 = z^2$.

Osservazione. Come già osservato in generale per le app. multilineari, il prodotto scalare è univocamente determinato dai valori che assume nelle coppie $\underline{v_i}, \underline{v_j}$ estraibili da una base $\mathcal{B}$. Infatti, se $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_k})$, $\underline{v} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underline{v_i}$ e $\underline{w} = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \underline{v_i}$, allora:

$$\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq k} \alpha_i \beta_j \, \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}).$$

Definizione. Sia φ un prodotto scalare di V e sia $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ una base ordinata di V. Allora si denota con **matrice associata** a φ la matrice:

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}))_{i,\, j=1 — n} \in M(n, \mathbb{K}).$$

Osservazione. Si possono fare alcune osservazioni riguardo $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

- $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è simmetrica, infatti $\varphi(\underline{v_i}, \underline{v_j}) = \varphi(\underline{v_j}, \underline{v_i})$ per definizione di prodotto scalare,
- $\varphi(\underline{v}, \underline{w}) = [\underline{v}]_{\mathcal{B}}^{\top} M_{\mathcal{B}}(\varphi) [\underline{w}]_{\mathcal{B}}$.

Teorema. (di cambiamento di base per matrici di prodotti scalari) Siano $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ due basi ordinate di V. Allora, se φ è un prodotto scalare di V e $P = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_V)$, vale la seguente identità:

$$\underbrace{M_{\mathcal{B}'}(\varphi)}_{A'} = P^{\top} \underbrace{M_{\mathcal{B}}}_{A} P.$$

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ e $\mathcal{B}' = (\underline{w}_1, ..., \underline{w}_n)$. Allora $A'_{ij} = \varphi(\underline{w}_i, \underline{w}_j) = [\underline{w}_i]_{\mathcal{B}}^{\top} A [\underline{w}_j]_{\mathcal{B}} = (P^i)^{\top} A P^j = P_i^{\top} (AP)^j = (P^{\top} AP)_{ij}$, da cui la tesi. □

Definizione. Si definisce **congruenza** la relazione di equivalenza $\cong$ definita nel seguente modo su $A, B \in M(n, \mathbb{K})$:

$$A \cong B \iff \exists \, P \in GL(n, \mathbb{K}) \mid A = P^{\top} AP.$$

Osservazione. Si può facilmente osservare che la congruenza è in effetti una relazione di equivalenza.

▶ $A = I^\top A I \implies A \cong A$ (riflessione),
▶ $A \cong B \implies A = P^\top B P \implies B = (P^\top)^{-1} A P^{-1} = (P^{-1})^\top A P^{-1} \implies B \cong A$ (simmetria),
▶ $A \cong B \implies A = P^\top B P$, $B \cong C \implies B = Q^\top C Q$, quindi $A = P^\top Q^\top C Q P = (QP)^\top C (QP) \implies A \cong C$ (transitività).

Osservazione. Si osservano alcune proprietà della congruenza.

▶ Per il teorema di cambiamento di base del prodotto scalare, due matrici associate a uno stesso prodotto scalare sono sempre congruenti (esattamente come due matrici associate a uno stesso endomorfismo sono sempre simili).
▶ Se A e B sono congruenti, $A = P^\top B P \implies \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(P^\top B P) = \operatorname{rg}(BP) = \operatorname{rg}(B)$, dal momento che P e $P^\top$ sono invertibili; quindi il rango è un invariante per congruenza. Allora è ben definito il rango $\operatorname{rg}(\varphi)$ di un prodotto scalare come il rango di una sua qualsiasi matrice associata.
▶ Se A e B sono congruenti, $A = P^\top B P \implies \det(A) = \det(P^\top B P) = \det(P^\top)\det(B)\det(P) = \det(P)^2 \det(B)$. Quindi, per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il segno del determinante è invariante per congruenza.

Definizione. Si dice **radicale** di un prodotto scalare φ lo spazio:

$$V^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \varphi(\underline{v}, \underline{w}) = 0, \forall\, \underline{w} \in V\}$$

Osservazione. Il radicale di $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico ha dimensione nulla, dal momento che $\forall\, \underline{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$, $q(\underline{v}) = \varphi(\underline{v}, \underline{v}) > 0$.

Definizione. Un prodotto scalare si dice **degenere** se il radicale dello spazio su tale prodotto scalare ha dimensione non nulla.

Osservazione. Si definisce l'applicazione lineare $\alpha_\varphi : V \to V^*$ in modo tale che $\alpha_\varphi(\underline{v}) = p$, dove $p(\underline{w}) = \varphi(\underline{v}, \underline{w})$.

Allora $V^\perp$ altro non è che $\operatorname{Ker} \alpha_\varphi$. Se V ha dimensione finita, $\dim V = \dim V^*$, e si può allora concludere che $\dim V^\perp > 0 \iff \operatorname{Ker} \alpha_\varphi \neq \{\underline{0}\} \iff \alpha_\varphi$ non è invertibile (infatti lo spazio di partenza e di arrivo di α_φ hanno la stessa dimensione). In particolare, α_φ non è invertibile se e solo se $\det(\alpha_\varphi) = 0$.

Sia $\mathcal{B} = (\underline{v_1}, ..., \underline{v_n})$ una base ordinata di V. Si consideri allora la base ordinata del duale costruita su $\mathcal{B}$, ossia $\mathcal{B}^* = (\underline{v_1^*}, ..., \underline{v_n^*})$. Allora

$$M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\alpha_\varphi)^i = [\alpha_\varphi(\underline{v_i})]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_1}) \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v_i}, \underline{v_n}) \end{pmatrix} \underbrace{=}_{\varphi \text{ è simmetrica}} \begin{pmatrix} \varphi(\underline{v_1}, \underline{v_i}) \\ \vdots \\ \varphi(\underline{v_n}, \underline{v_i}) \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}(\varphi)^i.$$

Quindi $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}}(\alpha_\varphi) = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Si conclude allora che φ è degenere se e solo se $\det(M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = 0$ e che $V^\perp \cong \operatorname{Ker} M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ con l'isomorfismo è il passaggio alle coordinate.