Note del corso di Geometria 1

Gabriel Antonio Videtta

10 maggio 2023

Quadriche e classificazione affine delle coniche

Questo avviso sta ad indicare che questo documento è ancora una bozza e non è da intendersi né completo, né revisionato.

Nota. Si assume che, nel corso del documento, valga che $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$.

Definizione (quadriche)**.** Si dice **quadrica** un qualsiasi luogo di zeri di un polinomio $p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ con $\deg p = 2$.

Definizione (coniche)**.** Si dice **conica** una quadrica relativa ad un polinomio in due variabili.

Osservazione.
▶ Una quadrica è invariante per la relazione $\sim$ su $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, dove $p_1 \sim p_2 \overset{\text{def}}{\iff} \exists\, \alpha \in \mathbb{K}^* \mid p_1 = \alpha p_2$. Infatti il luogo di zeri di un polinomio non varia se esso viene moltiplicato per una costante non nulla di $\mathbb{K}$.
▶ Una quadrica può essere vuota (come nel caso della conica relativa a $x^2 + y^2 + 1$ in $\mathbb{R}$).
▶ Si identifica con la notazione $p(\underline{x})$ con $\underline{x} \in \mathbb{K}^n$, la valutazione del polinomio p nelle coordinate di $\underline{x}$. Per esempio, se $\underline{x} = (1, 2)$ e $p(x, y) = x^2 + y^2$, con $p(\underline{x})$ si identifica il valore $p(1, 2) = 1^2 + 2^2 = 5$.

Osservazione (riscrittura di p mediante matrici)**.** Sia $p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ di grado due. Allora p si può sempre scrivere come $p_2 + p_1 + p_0$, dove p_i è un polinomio omogeneo contenente soltanto monomi di grado i.

In particolare, $p_2(x_1, \ldots, x_n)$ può essere sempre riscritto come $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$ con $a_{ij} \in \mathbb{K}$ con $a_{ij} = a_{ji}$. È infatti sufficiente "sdoppiare" il coefficiente c_{ij} di $x_i x_j$ in due metà, in modo tale che $c_{ij} x_i x_j = \frac{c_{ij}}{2} x_i x_j + \frac{c_{ij}}{2} x_i x_j = \frac{c_{ij}}{2} x_i x_j + \frac{c_{ij}}{2} x_j x_i$. Inoltre, anche $p_1(x_1, \ldots, x_n)$

può essere riscritto come $\sum_{i=1}^{n} b_{ij}$.

Si possono allora considerare la matrice $A \in M(n, \mathbb{K})$ ed il vettore $\underline{b} \in \mathbb{K}^n$, definiti in modo tale che:

$$A = (a_{ij})_{i,j=1-n}, \qquad \underline{b} = (b_i)_{i=1-n} \in \mathbb{K}^n.$$

Infatti, A e $\underline{b}$ soddisfano la seguente identità:

$$p(\underline{x}) = \underline{x}^\top A \underline{x} + \underline{b}^\top \underline{x} + c,$$

che, riscritta tramite l'identificazione di $\mathcal{A}_\mathrm{n}(\mathbb{K})$ come l'iperpiano $H_{n+1} \in \mathcal{A}_{n+1}(\mathbb{K})$, diventa:

$$p(\underline{x}) = \underline{\hat{x}}^\top \hat{A} \underline{\hat{x}}, \quad \text{dove } \hat{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & \underline{b}/2 \\ \hline \underline{b}^\top/2 & c \end{array}\right).$$

Si osserva che $\hat{A}$ è una matrice simmetrica di taglia $n+1$ a elementi in $\mathbb{K}$, e in quanto tale essa induce un prodotto scalare su $\mathbb{K}^{n+1}$. Pertanto la quadrica relativa p è esattamente l'intersezione tra H_{n+1} e $\mathrm{CI}(\hat{A})$, identificando $\mathbb{K}^{n+1}$ come H_{n+1}, ossia la quadrica è esattamente $\iota^{-1}(H_{n+1} \cap \mathrm{CI}(\hat{A}))$.

Definizione (matrice associata ad una quadrica)**.** Si definisce la costruzione appena fatta di $\hat{A}$ come la **matrice associata alla quadrica relativa a** p, e si indica con $\mathcal{M}(p)$. In particolare, A è detta la matrice che rappresenta la *parte quadratica*, e si indica con $\mathcal{A}(p)$, mentre $\underline{b}/2$ rappresenta la *parte lineare*, indicata con $\mathcal{L}(p)$, e $c = c(p)$ è detto *termine noto*.

Definizione (azione di $A(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))$ su $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$)**.** Sia $f \in A(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))$. Allora $A(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))$ agisce su $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ in modo tale che $p' = p \circ f$ è un polinomio per cui $p'(\underline{x}) = p(f(\underline{x}))$.

Definizione (equivalenza affine tra polinomi)**.** Si dice che due polinomi p_1, $p_2 \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ sono affinemente equivalenti se e solo se $\exists\, f \in A(\mathcal{A}_\mathrm{n}(\mathbb{K})) \mid p_1 = p_2 \circ f$. In tal caso si scrive che $p_1 \sim p_2$.

Osservazione.

- ▶ L'equivalenza affine è una relazione di equivalenza.
- ▶ Sia $Z(p)$ il luogo di zeri di p. Allora, $p_1 \sim p_2 \implies \exists\, f \in A(\mathcal{A}_\mathrm{n}(\mathbb{K})) \mid Z(p_2) = f(Z(p_1))$.
- ▶ In generale, se $p_1 = p_2 \circ f$, vale che $Z(p_2) = f(Z(p_1))$.

Proposizione (formula del cambiamento della matrice associata su azione di $A(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))$)**.** Sia $f \in A(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}))$ e sia $p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ di grado due. Allora vale la seguente identità:

$$\mathcal{M}(p \circ f) = \hat{M}^\top \mathcal{M}(p) \hat{M} = \left(\begin{array}{c|c} M^\top \mathcal{A}(p) M & M^\top (\mathcal{A}(p)\underline{t} + \mathcal{L}(p)) \\ \hline \left(M^\top (\mathcal{A}(p)\underline{t} + \mathcal{L}(p))\right)^\top & p(\underline{t}) \end{array}\right),$$

$$\text{con } \hat{M} = \left(\begin{array}{c|c} M & \underline{t} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right),$$

dove $f(\underline{x}) = M\underline{x} + \underline{t}\ \forall\, \underline{x} \in \mathbb{K}^n$ con $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ e $\underline{t} \in \mathbb{K}^n$.

Dimostrazione. Per definizione, $p \circ f$ è tale che $(p \circ f)(\underline{x}) = p(f(\underline{x})) = p(M\underline{x} + \underline{t})$. In particolare, $(p \circ f)(\underline{x}) = (\widehat{M\underline{x} + \underline{t}})^\top \mathcal{M}(p)(\widehat{M\underline{x} + \underline{t}}) = \left(\hat{M}\hat{x}\right)^\top \mathcal{M}(p) \left(\hat{M}\hat{x}\right)$. Pertanto vale che:

$$(p \circ f)(\underline{x}) = \hat{x}^\top \hat{M}^\top \mathcal{M}(p) \hat{M}\hat{x} \implies \mathcal{M}(p \circ f) = \hat{M}^\top \mathcal{M}(p) \hat{M},$$

da cui la tesi. □

Osservazione.

► Per la proposizione precedente, due matrici, associate a due polinomi di secondo grado affinemente equivalenti, variano per congruenza, così come le matrici della parte quadratica.

Pertanto $\mathrm{rg}(\mathcal{M}(p \circ f)) = \mathrm{rg}(\mathcal{M}(p))$, come $\mathrm{rg}(\mathcal{A}(p \circ f)) = \mathrm{rg}(\mathcal{A}(p))$ (così come, per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, non variano i segni dei vari determinanti). Allo stesso tempo, la classe di equivalenza di $\mathcal{M}(p)$ è rappresentata completamente per $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (tramite il rango) e per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (tramite la segnatura), per il teorema di Sylvester.

► Se f è una traslazione, $M = I_n$, e dunque la formula si riduce alla seguente:

$$\mathcal{M}(p \circ f) = \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{A}(p) & \mathcal{A}(p)\underline{t} + \mathcal{L}(p) \\ \hline (\mathcal{A}(p)\underline{t} + \mathcal{L}(p))^\top & p(\underline{t}) \end{array}\right).$$

In particolare, non varia la matrice relativa alla parte quadratica, ossia vale che $\mathcal{A}(p \circ f) = \mathcal{A}(p)$.

► Se $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\mathcal{M}(\lambda p) = \lambda \mathcal{M}(p)$, dal momento che $\mathcal{A}(\lambda p) = \lambda \mathcal{A}(p)$, così come $\mathcal{L}(\lambda p) = \lambda \mathcal{L}(p)$ e $c(\lambda p) = \lambda c(p)$. Tuttavia, a differenza del cambio di matrice per equivalenza affine, per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la segnatura non è più un invariante (infatti, in generale $\sigma(-S) = (\iota_-(S), \iota_+(S), \iota_0(S))$, se $S \in \operatorname{Sym}(n, \mathbb{R})$). Ciononostante non varia, in valore assoluto, la differenza tra l'indice di positività e quello di negatività, ossia $S(\mathcal{M}(p)) := |\iota_+ - \iota_-|$ continua ad essere invariante.

Definizione (quadrica non degenere)**.** Una quadrica relativa a $p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ si dice **non degenere** se $\operatorname{rg}(\mathcal{M}(p)) = n + 1$ (ossia se $\det(\mathcal{M}(p)) \neq 0$), e altrimenti si dice degenere. In particolare, una conica si dice *non degenere* se $\operatorname{rg}(\mathcal{M}(p)) = 3$ e degenere altrimenti.

Definizione (quadrica a centro)**.** Una quadrica C relativa a $p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ (o p stesso) si dice **a centro** se $\exists\, \underline{x}_0 \in \mathbb{K}^n \mid p(\underline{x}_0 + \underline{x}) = p(\underline{x}_0 - \underline{x})$ $\forall\, \underline{x} \in \mathbb{K}^n$. In particolare, si dice che tale $\underline{x}_0$ è un **centro di simmetria** per C.

Osservazione.
► Si osserva che $\underline{0}$ è un centro di simmetria per p se $p(\underline{x}) = p(-\underline{x})$, ossia se e solo se la parte lineare $\mathcal{L}(p)$ è nulla.

► Allora $\underline{x}_0$ è un centro di simmetria per p se e solo se $\underline{0}$ è un centro di simmetria per $p \circ f$, dove f è la traslazione che manda $\underline{0}$ in $\underline{x}_0$. Infatti, in tal caso, vale che $f(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{x}_0$ e che:

$$(p \circ f)(\underline{x}) = p(\underline{x} + \underline{x}_0) = p(\underline{x} - \underline{x}_0) = (p \circ f)(-\underline{x}).$$

► Per le osservazioni precedenti, vale allora che $\underline{x}_0$ è un centro di simmetria per p se e solo se la parte lineare di $p \circ f$ è nulla, ossia se e solo se $\underline{x}_0$ è tale che $\mathcal{A}(p)\underline{x}_0 + \mathcal{L}(p)$. Pertanto p è a centro se e solo se il sistema $\mathcal{A}(p)\underline{x} = -\mathcal{L}(p)$ è risolvibile, e quindi se e solo se $\operatorname{rg}\big(\mathcal{A}(p) \bigm| \mathcal{L}(p)\big) = \operatorname{rg}(\mathcal{A}(p))$ $\iff$ $\mathcal{L}(p) \in \operatorname{Im}(\mathcal{A}(p))$, per il teorema di Rouché-Capelli. Vale dunque che p è sempre a centro, se $\mathcal{A}(p)$ è invertibile.

Poiché i centri di una conica sono esattamente le soluzioni del sistema lineare $\mathcal{A}(p)\underline{x} = -\mathcal{L}(p)$, essi formano un sottospazio affine. In particolare, se $\underline{x}_0$ è un centro, vale che tale sottospazio è esattamente $\underline{x}_0 + \operatorname{Ker} \mathcal{A}(p)$. Pertanto, se $\mathcal{A}(p)$ è invertibile (ossia se è iniettiva), il centro è unico.